基礎数学選書

25

現代微分幾何入門

ブラウン大学教授
理学博士
野水克己 著

裳華房

編 集 趣 旨

最近の科学技術の発展には誠に目覚しいものがあります．それにつれてその基礎であり，その手段である数学の重要性はますます増大しつつあります．

また一方，いままでは主として科学技術の方面にのみ応用をもっていると思われていた数学が，最近になって実は，人間のあらゆる社会活動を対象とする行動科学の方面にも非常に大きな応用をもっていることが明らかになってまいりました．

このように，科学技術と行動科学の２つの方面からの社会的要求はますます増大する一方ですので，大学における数学教育の比重はますます大きくなりつつあります．

しかしながら誠に残念なことに，大学の講義時間には大きな制限があるために，講義がややもすれば型通りになりがちで，学生の数も毎年増加の一途をたどっていますので，講義だけで学生が将来必要な数学をマスターするということはますます困難になりつつあるのが現状です．

このような状態のもとで，大学の講義を十分に理解し，それを活用する力を十分に身につけるには，初学者の心理も盲点も知りつくしている経験豊かな著者の手になる懇切丁寧な参考書によるのが一番よい方法です．

ややもすれば，大学生相手の書物には読者をつきはなしたような態度が多いのですが，その点を改め，読者諸君が素直に読み進むことができ，しかもそれによって厳密で豊富な知識が身につき，理論に対する真の興味がわいてくるようにと念願して企画されたのが，この「基礎数学選書」であります．

本選書は，以上の趣旨に基づいて，数学の種々の分科を１つ１つ教科書風の堅苦しさから解放された自由な立場から，できるだけ詳細に解説するという目的で，比較的多くの小冊子に分けられています．

読者諸君は，この選書のうちから諸君が必要とされるもの，興味をもたれるものを自由に選ぶことができると思います．

編集委員会は，この選書に入れた項目で，将来数学を活用しようとする人たちに必要なものはほとんど網羅していると信じます.

また，将来それを活用する場合，数学はこの選書に解説されている内容で十分役立つと確信します.

したがって，これらの選書で学習し，それらを書棚においておかれるならば，社会にでて数学を活用する場合にも大いに役立つことを信じて疑わないものであります.

昭和44年8月

矢野健太郎
国沢清典
茂木勇
石原繁
岩堀長慶

まえがき

本書は数学，理論物理学を専攻する人たちのための現代の微分幾何への入門書である．

古典力学以来，物理学と微分幾何学の関係は密接であるが，特にアインシュタインの相対性理論とリーマン幾何，テンソル解析との結びつきは目ざましいものであった．1950 年代以来の微分幾何の進歩に伴って，現在の相対性理論に用いられるローレンツ微分幾何もまた極めて洗練されたものになっていることは，巻末の文献にある Hawking - Ellis や Sachs - Wu の書物を手にとってみれば一目瞭然である．さらに C. N. Yang らによって，ファイバー束とその接続の理論がゲージ場の理論において用いられて以来，微分幾何の有用さは一段と増した．

本書の題材を選ぶにあたっては，このような考慮がかなり大きい役割を演じた．数学者と理論物理学者のいわば高度の常識としての微分幾何への入門書として，すでによく発展整理されている事柄の中から特に基本的と思われることを解説したが，同時に将来の研究への興味のために，この数年来に得られた新しい観点，方法，結果であまり準備を要しないで近づくことの出来るいくつかをとり入れた．線形接続の全完備性，ヤコビ場とその応用，共形ワイル・テンソルの一般化されたとり扱い，$SO(n)$ の部分多様体としての幾何，ローレンツ内積に関する逆向きのコーシ・シュワルツ不等式，ローレンツ多様体に特有な断面曲率，リッチ・テンソルに関する結果，時間的曲線の物理的解釈，$SL(2, R)$ のローレンツ幾何などはすでにかなり微分幾何を勉強された読者にも興味が多いことを希望している．

全体を通じて，定義，定理は必ずしも最も一般な形では述べないが，厳密さを失わないようにした．理論の動機や筋道をなるべく説明し図式を多くとり入れるとともに，他方技術的に細かい事柄は問として読者に任せたことも多い．

わざわざ「問　上の主張を確かめよ」とかいてなくても，証明は自分で納得がゆくようつけてゆくのが数学の本の正道な読み方かも知れないが，証明の細部が省略されていると注意されるほうが初めての読者には安心でよみやすいであろうし，また大筋の勉強をするためにはそのような細部は最初はとばしても差支えないはずである．問の中には，もちろん他の練習的な意味のものもかなりいれてある．

現代の微分幾何は，何といっても多様体に関する予備知識なしには始められない．本書では読者がすでにそのような勉強をしていると仮定して第1章に必要な事柄をまとめてかいた．古典的な曲面論はとり扱わないが，それから発展した部分多様体の幾何の観点は有用であるからとり入れてある．数学の各分野がめざましい進展をとげている中で，入門を勉強するためにはある程度整理のついた段階の抽象的あるいは一般的な概念や理論を一応学んでから，具体的あるいは特殊な事実や話題にあたってゆくことが不可欠のことといえよう．特に微分幾何ではこのことが本当のように思われる．

最後に本書の執筆をおすすめ下さった矢野健太郎先生に厚く感謝の意を表したい．本書の出版，校正に関して裳華房の遠藤恭平氏，細木周治氏から誠にゆきとどいた御協力を頂いたことに感謝する．

昭和 56 年 4 月　　　　　　Maine 州にて

野　水　克　己

目　　次

1. 多 様 体

2. 接続の理論

3. 線 形 接 続

4. リ ー マ ン 幾 何 学

5. ローレンツ幾何学

術語と記号

本書での術語は，原則として 岩波数学辞典（第2版）に従った.*

微分可能は無限回微分可能（C^∞ 級）を意味し，多様体は微分可能多様体を意味することにする.

多様体 M に対し

$\mathfrak{F}(M)$： 微分可能関数の全体

$\mathfrak{X}(M)$： 微分可能ベクトル場の全体

$T_x(M)$： 点 x での接ベクトル空間

$L(M)$： Mの接 n 枠束

$P=P(M,G)$： 底空間M，構造群Gの主ファイバー束

などはもっともよく使う記号である．他に

R^n： 実数上の n 次元数ベクトル空間

E^n： n 次元ユークリッド空間

L^n： n 次元ローレンツ空間

$\mathfrak{gl}(n,R)$： n 次実行列全体

$GL(n,R)$： 一般線形群 （行列式 $\neq 0$）

$A=[a^i{}_j]$ または $[a_{ij}]$： 行列，i 行 j 列の成分

${}^tA$ ： A の転置行列

$O(n)$： 直交群 （${}^tA=A^{-1}$）

$\mathfrak{o}(n)$ ： n 次実歪対称行列全体 （${}^tA=-A$）

$\mathfrak{s}(n)$ ： n 次実対称行列全体 （${}^tA=A$）

$\mathfrak{S}$ ： 巡回和 （$\mathfrak{S}K(X,Y,Z)=K(X,Y,Z)+K(Y,Z,X)+K(Z,X,Y)$）

x_t' ： 曲線 x_t の接ベクトル

---

*： 接分布（distribution）は数学辞典にはない．また基本ベクトル場は，数学辞典では第3章 §1に現れる $B(\xi)$ を意味するが，本書では第1章 §7にある A^* を意味する．$B(\xi)$ は本書では基底ベクトル場とよぶ.

1 多　様　体

微分可能多様体に関する基礎知識は仮定するが，定義や基本的事実をまとめておこう．特に，ベクトル場，微分形式，テンソル場に関しては，あとで用いること だけ のべる．リー群の定義と二，三の例の後ファイバー束に関する事柄を本書に便宜な形でとり扱う．主ファイバー束の構造群の縮小，同伴ファイバー束の切り口の存在などを論じ，多様体Mの接n枠束 $L(M)$，接ベクトル束 $T(M)$，テンソル束 $T^r{}_s(M)$，また，リーマン計量の存在を論じる．

§1．多様体

ハウスドルフ空間 M が n 次元の**微分可能多様体** (differentiable manifold) であるというのは，M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ で次のような性質をもつものが存在することである．

1) 各 α に対して，開集合 U_α から n 次元ユークリッド空間 R^n のある開集合 V_α の上への同相写像 φ_α が存在する．

2) $U_\alpha \cap U_\beta$ が空でないとき，V_α の開部分集合 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ から V_β の開部分集合 $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ の上への写像

$$\psi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \cdot \varphi_\alpha^{-1}$$

は微分可能である．すなわち R^n の普通の座標系を用いてこの写像を

$$y^i = \psi^i(x^1, \cdots, x^n), \qquad 1 \leqq i \leqq n$$

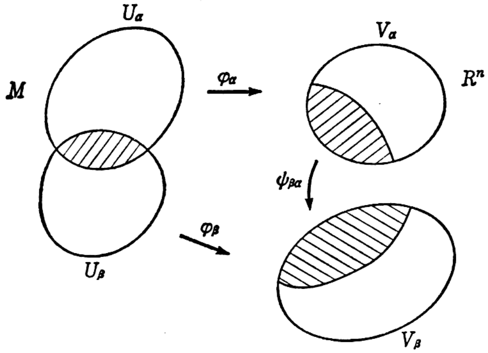
と表したとき，各関数 ψ^i は無限回微分可能である．無限回微分可能という代わりにクラス C^∞ ということも多い．

α と β とをとりかえれば写像

$$\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \cdot \varphi_\beta^{-1}$$

も微分可能であり，$\psi_{\alpha\beta}$ は $\psi_{\beta\alpha}$ の逆写像であるからそれぞれのヤコビ行列式は0でない（次頁1-1図）．

ハウスドルフ空間 M がこのような開被覆 $\{U_\alpha\}$ をもつとき，M は微分可能多様体である．また，M は**微分可能構造** (differentiable structure) をもつというのであるが，同じ性質をもつ別の開被覆 $\{W_\alpha\}$ があるとき，両方を一緒にした開被覆が上にのべた性質 2) をもつときには $\{U_\alpha\}$ と $\{W_\alpha\}$ とは M 上に同じ微分可能構造を定めるという．



1-1 図

今後，断らない限り多様体とは微分可能多様体を意味し，その微分可能構造は一つきまっているものと考える．

さて多様体 M があり，その微分可能構造を定める一つの開被覆をとる．M の開集合 U と U から R^n の開集合 V の上への同相写像 φ

$$p \in U \to \varphi(p) = (x^1(p), \cdots, x^n(p)) \in V$$

があるとして，$U \cap U_\alpha$ が空でないような任意の α に対して

$$\varphi \cdot \varphi_\alpha{}^{-1}: \quad \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \to \varphi(U \cap U_\alpha)$$

とその逆

$$\varphi_\alpha \cdot \varphi^{-1}: \quad \varphi(U \cap U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$$

のいずれもが微分可能であるとき，U を M の**座標近傍** (coordinate neighborhood) といい，U 上の関数系

$$\{x^1, x^2, \cdots, x^n\}$$

を U 上の**座標系** (coordinate system) とよぶ．これを M の**局所座標系** (local coordinate system) とよぶことも多い．任意の点 p に対してその座標近傍 U で

$$x^1(p) = \cdots = x^n(p) = 0, \qquad V = \{(x^1, \cdots, x^n); |x^i| < \delta\}, \quad \delta > 0$$

となっているようなものを p を原点とする座標近傍という．

多様体 M またはその開集合 W の上で定義された関数 f が**微分可能**であ

るというのは，任意の $p\in M$（または W）に対してその座標近傍 $U(\subset W)$ をとり，f を U の座標（$x^1,\cdots,x^n$）の関数と考えたとき，それが微分可能であることである．この条件は局所座標系のとり方に無関係である．M 上の微分可能関数の全体を $\mathfrak{F}(M)$ で表す．関数に対する普通の 和 $f+g$，積 fg，スカラー積 λf（ここで λ は実数） に関して $\mathfrak{F}(M)$ は実数体上の代数を作っている．

多様体 M の上には微分可能な関数がたくさん存在する．実際，M のコンパクト部分集合 K とそれを含む開集合 W が与えられたとき，K の上では1に等しく W の外では0に等しいような $f\in\mathfrak{F}(M)$ が存在する．また点 p の近傍 U の上の微分可能関数 f に対して，p の U より小さい近傍 $V(\bar{V}\subset U)$ の上で f と一致するような M 全体上の微分可能関数が存在する．

多様体は局所的にはユークリッド空間と同相であるから，もちろん局所コンパクトである． 多様体 M に対しては，M が第2可算公理をみたすことと可算コンパクトであることとは同値である．この条件の下で M はまたパラコンパクトであり，任意の開被覆 $\{U_\alpha\}$ に対し，その細分である局所有限な開被覆 $\{V_i\}$ とそれに属する 1 の分割 (partition of unity) $\{\varphi_i\}$ $(\varphi_i\in\mathfrak{F}(M))$ が存在する．すなわち各 φ_i は V_i の外では 0 であり，$\sum_i\varphi_i=1$ が M の各点で成り立つ．

多様体 M から多様体 M' への写像 φ が微分可能であるとは，任意の $f'\in\mathfrak{F}(M')$ に対して $f'\cdot\varphi\in\mathfrak{F}(M)$ となることである． φ が微分可能であるときは連続であり，任意の点 $p\in M$ とその像 $p'=\varphi(p)$ に対して p' の座標近傍を V，その座標系を $\{y^1,\cdots,y^m\}$ (m は M' の次元)，$\varphi(U)\subset V$ となる p の座標近傍を U，その座標系を $\{x^1,\cdots,x^n\}$ として，φ を

$$y^i=\varphi^i(x^1,\cdots,x^n),\qquad 1\leqq i\leqq m$$

で表したとき，φ^i は微分可能な関数となる．逆に，M から M' への連続写像が局所座標系に関してこのように微分可能な関数で表されるとき，φ は微分可能である．

特に，M から M' の上への1対1の微分可能写像 φ でその逆 φ^{-1} も微分可能であるとき，φ を**微分同相写像** (diffeomorphism) という．M から M'

への微分同相写像が存在するとき，M と M' とは**微分同相**（diffeomorphic）であるという．

多様体 M の点 p における**接ベクトル**（tangent vector）とは，$\mathfrak{F}(M)$ から実数体 R への写像 X で

1） $X(f+g)=Xf+Xg;\qquad X(\lambda f)=\lambda Xf\qquad(\lambda\in R)$

2） $X(fg)=Xf\cdot g(p)+f(p)\cdot Xg$

を満足するものである． p における接ベクトルの全体を**接空間**（tangent space）とよび，$T_p(M)$ で表す．これは

$$(X+Y)f=Xf+Yf,\qquad (\lambda X)f=\lambda(Xf)$$

によって定義される和 $X+Y$ とスカラー倍 λX とに関して実ベクトル空間を作る．したがって $T_p(M)$ を**接ベクトル空間**（tangent vector space）ともよぶ．

$X\in T_p(M)$ であるとき，$f,g\in\mathfrak{F}(M)$ が p の近傍で一致するものとすると $Xf=Xg$ であることがわかる．このことから，p の近傍で定義された微分可能な関数 f に対しても Xf が定義されることになる．特に，p の近傍の座標系 $\{x^1,\cdots,x^n\}$ に対して

$$a^i=X(x^i),\qquad 1\leqq i\leqq n$$

という n 個の実数が定まる．一方 $(\partial/\partial x^i)_p$ によって，p の近傍の関数 $f(x^1,\cdots,x^n)$ を

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{(a^1,\cdots,a^n)},\qquad \text{ただし}\quad a^i=x^i(p)$$

にうつす写像を表すと，それは p での接ベクトルと考えることができる．このとき

$$X=\sum_{i=1}^{n}a^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

と表すことができる．$\{\partial/\partial x^1,\cdots,\partial/\partial x^n\}$ は $T_p(M)$ の基を作るから，ベクトル空間 $T_p(M)$ の次元は M の次元 n に等しい．

M の各点 p に対して，ある接ベクトル $X_p\in T_p(M)$ を対応させる写像を**ベクトル場**（vector field）とよび X で表す．$\{x^1,\cdots,x^n\}$ が局所座標系な

らばその存在範囲において

$$X_p=\sum_{i=1}^{n}\xi^i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

とかくことができる．$(\xi^1(p),\cdots,\xi^n(p))$ を X の $\{x^1,\cdots,x^n\}$ に関する**成分** (component) とよぶ．関数 $\xi^1,\cdots,\xi^n$ が微分可能であるとき X は微分可能であるという．この条件も局所座標系のとり方に無関係である．

M 上で定義された微分可能ベクトル場の全体を $\mathfrak{X}(M)$ で表す．$X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ のとき

$$(X+Y)_p=X_p+Y_p,\qquad (\lambda X)_p=\lambda X_p$$

によって　和 $X+Y$ とスカラー倍 λX を定義することによって $\mathfrak{X}(M)$ は実ベクトル空間になる．また，$f\in\mathfrak{F}(M)$ に対して

$$(fX)_p=f(p)X_p$$

として $\mathfrak{X}(M)$ を $\mathfrak{F}(M)$ 上の加群と考えることもできる．

$X\in\mathfrak{X}(M)$, $f\in\mathfrak{F}(M)$ ならば $Xf\in\mathfrak{F}(M)$ となるから，$X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ が与えられたとき，

$$[X,Y]f=X(Yf)-Y(Xf),\qquad f\in\mathfrak{F}(M)$$

によって $\mathfrak{F}(M)$ をそれ自身にうつす写像 $[X,Y]$ を定義する．各点 p で

$$[X,Y]_pf=X_p(Yf)-Y_p(Xf)$$

はある接ベクトル $[X,Y]_p\in T_p(M)$ をきめることがわかるから，$[X,Y]$ はベクトル場でありかつ微分可能となる．この演算を $\mathfrak{X}(M)$ の**括弧積** (bracket) とよぶ．

$[X,Y]$ は実数に関して双線形，$[Y,X]=-[X,Y]$ また

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$$

を満足する．これを**ヤコビ恒等式** (Jacobi identity) とよぶ．$\mathfrak{X}(M)$ は（無限次元の）**リー環** (Lie algebra) を作る．

問　局所座標系 $\{x^1,\cdots,x^n\}$ に関して

$$X=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i},\qquad Y=\sum_{i=1}^{n}\eta^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

であるとき次式を証明せよ．

$$[X, Y] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

問　$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ に対して次式を証明せよ.

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

M から M' への微分可能写像 φ があるとき，M の点 p での **微分** (differential) を定義する．$X \in T_p(M)$ に対して，

$$X' : \quad f' \in \mathfrak{F}(M') \to X(f' \cdot \varphi) \in R$$

という写像は M' の点 $\varphi(p)$ における接ベクトルであることが確かめられる．$X \in T_p(M)$ に $X' \in T_{\varphi(p)}(M')$ を対応させる写像を φ の p における微分とよび，$(\varphi_*)_p$ または φ_* で表す．これは $T_p(M)$ から $T_{\varphi(p)}(M')$ への線形写像である．

いま，$\{x^1, \cdots, x^n\}$ が p の近傍 U の座標系，$\{y^1, \cdots, y^m\}$ が $\varphi(p)$ の近傍の座標系，φ が

$$y^i = \varphi^i(x^1, \cdots, x^n), \qquad 1 \leqq i \leqq m$$

で表されていると，U の各点で

$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}, \qquad 1 \leqq j \leqq n$$

となる．

いま，$X = \sum_{i=1}^{n} a^i (\partial/\partial x^i)_p \in T_p(M)$ とするとき，曲線

$$x^i(t) = x^i(p) + ta^i, \qquad 1 \leqq i \leqq n$$

を考えると U 上の任意の微分可能関数 f に対して

$$Xf = \left[\frac{d(f(x^1(t), \cdots, x^n(t)))}{dt} \right]_{t=0}$$

となる．いいかえれば，X は曲線 $x(t)$ に沿う方向微係数 (directional derivative) である．写像 φ による $x(t)$ の像は $\varphi(p)$ からでる M' の曲線であるが，この曲線に沿う方向微係数

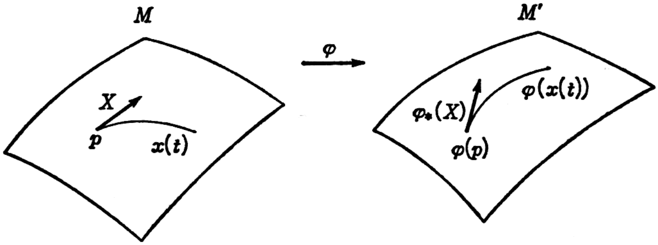
$$\left[\frac{df'(\varphi(x(t)))}{dt} \right]_{t=0}, \qquad f' \in \mathfrak{F}(M')$$

が $(\varphi_* X) f'$ を与えることがわかる．

局所座標系を使わなくても，pを始点 $x(0)$ とする曲線 $x(t)$ に対して $t=0$ における接ベクトルを

$$Xf=\left[\frac{d(f(x(t)))}{dt}\right]_{t=0},\qquad f\in\mathfrak{F}(M)$$

できまる $X\in T_p(M)$ と定義できる．そうすると，$\varphi_*(X)$ は曲線 $\varphi(x(t))$ の $t=0$ における接ベクトルに他ならない（1-2 図）．



1-2 図

曲線 $x(t)$ の各 t における接ベクトルを

$$Xf=\left[\frac{df(x(t))}{dt}\right]_t,\qquad f\in\mathfrak{F}(M)$$

により定義できる．これを $x'(t)$ という記号で表す．

最後に，多様体 M の開集合 W は M の局所座標系を W に制限することにより同じ次元の多様体とみなすことができる．これを**開部分多様体** (open submanifold) という．たとえば，n次実行列全体 $\mathfrak{gl}(n,R)$ を R^{n^2} と同一視するとき，一般線形群 (general linear group) $GL(n,R)$ はその開部分多様体となる．

§2. 部分多様体

多様体 M から M' への微分可能写像φは，M の各点 p での微分 $(\varphi_*)_p$ が1対1である場合**はめこみ** (immersion) という．M から M' へのはめこみφが存在するとき，M を M' の**はめこまれた部分多様体** (immersed submanifold) という．

特に φ が1対1で，しかも M から M' の中の相対位相をもつ部分集合 $\varphi(M)$ への写像 φ が同相であるとき，φを**うめこみ** (imbedding) とよび，

Mをうめこまれた部分多様体 (imbedded submanifold) とよぶ.

多様体 M と M' が与えられたとき, M から M' へのはめこみ, またうめこみを研究の対象にすることができる. あるいは多様体 M' が与えられたとき, その部分集合 M ではめこまれたあるいはうめこまれた部分多様体になっているものを調べることもできる. ここではこの後の立場から, よく知られた多様体の部分多様体として得られる多様体のことを考えよう.

多様体 M' の部分集合 M が**局所的n次元部分多様体構造** (local n-submanifold structure) をもつというのは次の条件が成り立つこと, すなわち, Mの任意の点pに対して M' における座標近傍 V とその座標系 $\{x^1, \cdots, x^m\}$ があり (m は M' の次元), それに関して

$$V \cap M = \{q \in V;\ x^{n+1}(q) = \cdots = x^m(q)\}$$

となることである.

Mが局所的n次元部分多様体構造をもつとき, M'からの相対的位相に関して上のような $U = V \cap M$ の全体は開被覆を作るが, 各 U の上で

$$q \in U \to \{x^1(q), \cdots, x^n(q)\}$$

を座標系と考えることにより, M が M' にうめこまれた n 次元微分可能多様体になることがわかる.

それでは多様体 M' のどのような部分集合 M が局所的部分多様体構造をもつであろうか? 一番簡単な例はユークリッド空間 E^{n+1} のある方程式 $f=0$ によって定義される超曲面である. すなわち, fを E^{n+1} 上の微分可能関数として

$$M = \{x \in E^{n+1};\ f(x) = 0\}$$

とする. もし M の各点pで, ある x^i について

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p \neq 0$$

であるならば, M は局所的n次元部分多様体構造をもち, したがって E^{n+1} にうめこまれたn次元多様体になる. このことはよく知られた陰関数に関する定理からわかる.

具体的な例としては, E^{n+1} の半径 r の球面

$$(x^1)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=r^2$$

や，2次曲面

$$(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2-(x^{n+1})^2=-r^2$$

などがある．また，n 次実行列全体 $\mathfrak{gl}(n, R)$ を E^{n^2} と同一視したとき，**特殊線形群**

$$SL(n, R)=\{A\in\mathfrak{gl}(n, R);\ \det A=1\}$$

を考える． $\mathfrak{gl}(n, R)$ 上で $f(A)=\det A$ とすれば，上にのべた0でない偏微分係数に関する条件が $SL(n, R)$ の各点でみたされていることがわかる（A の行列式が A の n^2 個の成分の関数として n 次斉次であることを用いて）．したがって $SL(n, R)$ は (n^2-1) 次元多様体である．

上の超曲面の場合を一般化して次の定理が得られる．

定理 多様体 M' から多様体 N への微分可能写像 φ があり，微分 φ_* の階数が M' 上で定値 k であるとする．このとき，N の任意の点 p に対して

$$\varphi^{-1}(p)=\{q\in M';\ \phi(q)=p\}$$

は（空集合でなければ）M' の $(m-k)$ 次元の部分多様体である．ただし m は M' の次元である．

この定理の応用として，**直交群** (orthogonal group)

$$O(n)=\{A\in\mathfrak{gl}(n, R);\ A^tA=I_n\}\quad ({}^tA \text{ は } A \text{ の転置行列})$$

が $n(n-1)/2$ 次元の多様体であることを示すことができる．そのために写像

$$\varphi:\quad A\in GL(n, R)\ \to\ \varphi(A)=A^tA\in\mathfrak{gl}(n, R)$$

を考えると， $O(n)=\varphi^{-1}(I_n)$ である． φ_* の階数は $GL(n, R)$ の各点で $n(n+1)/2$ である．

問 上の写像 φ の $A\in GL(n, R)$ における微分 $(\varphi_*)_A$ は

$$(\varphi_*)_A(X)=X^tA+A^tX,\qquad X\in\mathfrak{gl}(n, R)$$

で与えられる．任意の $Y\in\mathfrak{s}(n)$（n 次実対称行列の全体）に対して $X=(1/2)Y({}^tA)^{-1}$ とすれば

$$(\varphi_*)_A(X)=Y$$

であることを示せ．これから $(\varphi_*)_A$ の階数が $n(n+1)/2$ であることを示せ．

回転群 (rotation group)　$SO(n)=\{A\in O(n);\ \det A=1\}$　は $O(n)$ の単位元を含む連結成分で，$O(n)$ の開部分多様体である．

§3. ベクトル場と接分布

多様体 M の **1 助変数変換群** (1-parameter group of transformations) とは，各実数 t に対して M のそれ自身への微分同相写像（これを単に変換とよぶ）φ_t があり，写像

$$(t,p)\in R\times M\to\varphi_t(p)\in M$$

が微分可能であり，かつすべての $t,s\in R$ について

$$\varphi_t\cdot\varphi_s=\varphi_{t+s} \tag{1}$$

が成り立つような族 $\{\varphi_t\}$ のことである．φ_0 は恒等変換となる．

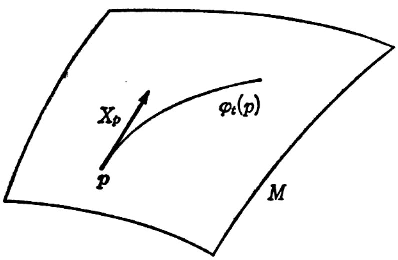
このとき，任意の $f\in\mathfrak{F}(M)$ に対して

$$X_pf=\left[\frac{df(\varphi_t(p))}{dt}\right]_{t=0} \tag{2}$$

と定義することによりベクトル場 $X:p\to X_p$ が定まる．前にのべたように，X_p は p の **軌道** (orbit) とよばれる曲線 $\varphi_t(p)$ の $t=0$ における接ベクトルになっている．このことを

$$X_p=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t(p)-p}{t} \tag{3}$$

とかき表すことにする (1-3 図).



1-3 図

1 助変数変換群 $\{\varphi_t\}$ からこのようにしてベクトル場 X がひきおこされるが，逆にベクトル場 X が与えられたとき，(3) のような関係をもつ 1 助変数変換群 $\{\varphi_t\}$ が存在するであろうか？これに関して一般的な答は次の定理で与えられる．

定理 1　$X\in\mathfrak{X}(M)$ が与えられたとき，M の各点 p に対してその近傍 U と，ある正数 ε と微分可能な写像

$$(t,q)\in(-\varepsilon,\varepsilon)\times U\to\varphi_t(q)\in M$$

が存在して，次の条件を満足する：

各 $t\,(|t|<\varepsilon)$ に対して $\varphi_t : q \to \varphi_t(q)$ は U から開集合 $\varphi_t(U)$ への微分同相写像であり，$|t|, |s|,\ |t+s|<\varepsilon,\ q\in U,\ \varphi_t(q)\in U$ ならば

$$\varphi_s(\varphi_t(q))=\varphi_{s+t}(q)$$

が成り立ち，さらに

$$X_q=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t(q)-q}{t}, \qquad q\in U \tag{4}$$

が成り立つ.

このとき $\{\varphi_t\}$ を**局所的1助変数変換群**ということにする.

この定理の証明の要点は，p の近傍の座標系 $\{x^1,\cdots,x^n\}$ をとり，与えられたベクトル場を

$$X=\sum_{i=1}^{n}\xi^i(x^1,\cdots,x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

と表したとき，$\varphi_t(q)$ の座標を表す関数

$$\varphi^i(t,q), \qquad 1\leqq i\leqq n$$

は微分方程式系

$$\frac{d\varphi^i}{dt}=\xi^i(\varphi^1(t,q),\cdots,\varphi^n(t,q)), \qquad 1\leqq i\leqq n$$

を満足し，かつ初期条件

$$\varphi^i(0,q)=q^i, \qquad 1\leqq i\leqq n$$

をみたす．ここで $(q^1,\cdots,q^n)$ は点 q の座標である．このような微分方程式系の解 $\varphi^i(t,q)$ を用いて

$$\varphi_t(q)=(\varphi^1(t,q),\cdots,\varphi^n(t,q))$$

と定義する．定理の条件をみたすために $t,\ q$ に関する解の存在範囲を適当に制限する必要があるが，詳細は省略する.

今後，$\{\varphi_t\}$ は X により生成される局所的1助変数変換群であるということにして，存在範囲はいちいち断らないことにする．次の事実が知られている.

定理 2 ベクトル場 $X,\ Y$ がそれぞれ局所的1助変数変換群 $\{\varphi_t\},\ \{\psi_s\}$ を生成するとき

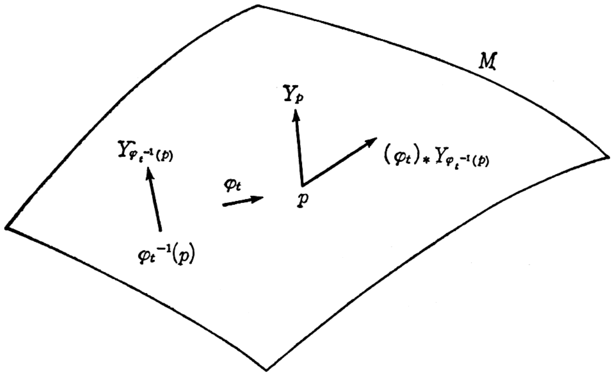
$$(5) \qquad [X, Y]_p = \lim_{t\to 0} \frac{Y_p - ((\varphi_t)_* Y)_p}{t}$$

が成り立つ．ここで

$$((\varphi_t)_* Y)_p = (\varphi_t)_{*\varphi_t^{-1}(p)}(Y_{\varphi_t^{-1}(p)})$$

である（1-4 図）．また $[X, Y]=0$ になるのは $\varphi_t \cdot \psi_s = \psi_s \cdot \varphi_t$ がすべての t, s に対して成り立つとき，かつそのときに限る．

(5) は括弧積の幾何的意味を与えている．



1-4 図

さて，ベクトル場 X がどの点でも 0 にならないときは，M の各点で X_p で張られる $T_p(M)$ の 1 次元部分空間を Δ_p とかき，M 上の **直線場** (line field) が得られる．もっと一般に，多様体 M 上の **k 次元接分布** (distribution) とは，M の各点 p に対して $T_p(M)$ のある k 次元部分空間 Δ_p を対応させる規則である．k 次元接分布 Δ が微分可能であるというのは，各点の近傍 U で微分可能なベクトル場 $X_1, \cdots, X_k$ が U の各点 q で Δ_q の基を作るようにとれることである．このとき $\{X_1, \cdots, X_k\}$ を Δ の **局所基** (local basis) とよぶ．また Δ の **積分多様体** (integral manifold) とは，M の部分集合 N で包含写像 $N \to M$ がはめこみになっているような部分多様体であって，各 $p \in N$ で $T_p(N) = \Delta_p$ となるようなものをいう．M の任意の点に対し，それを通る積分多様体が存在するとき，Δ は **完全積分可能** (completely integrable) と

いわれる.

接分布 $\varDelta$ が完全積分可能であるための必要かつ十分な条件は，ベクトル場 X, Y が各点で $\varDelta$ に属する場合，括弧積 $[X, Y]$ も各点で $\varDelta$ に属することである. 積分多様体の大局的存在については次の結果が知られている(松島与三：多様体入門 (数学選書 5，裳華房，p. 155)).

定理 3　多様体 M 上の k 次元微分可能接分布が完全積分可能ならば，M の任意の点 p を通る積分多様体 N で極大なもの (すなわち p を通る積分多様体で N を含むものは N と一致するもの) が存在する. p を含む任意の積分多様体は N の開部分多様体になっている.

§4. 微分形式

M を n 次元多様体とする. M の各点 p で，接空間 $T_p(M)$ の双対空間 $T_p{}^*(M)$ のことを**共変接空間** (cotangent space) という. M の各点 p に対し $T_p{}^*(M)$ のある元 ω_p を対応させる規則を **1次微分形式** (differential form of degree 1 または differential 1-form) という.

$\{x^1, \cdots, x^n\}$ が局所座標系であるとき，各点 p で $\{dx^1, \cdots, dx^n\}$ により $\{\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^n\}$ に双対な $T_p{}^*(M)$ の基を表す. すなわち

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\delta^i{}_j \qquad \text{(クロネッカーの記号)}$$

任意の1次微分形式 ω は座標系の範囲内で

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}\omega_i dx^i$$

と表せる. ω が微分可能であるとは ω の成分 (ω_i) が微分可能な関数であることで，これは局所座標系のとり方に無関係であることはベクトル場のときと同様である.

微分可能な1次微分形式 ω が与えられているとき，$X\in\mathfrak{X}(M)$ に対して

$$(\omega(X))_p=\omega_p(X_p)$$

として，M 上の関数 $\omega(X)$ が得られるが，これは微分可能な関数であることは，局所座標系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ に関して

$$X=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i},\qquad \omega=\sum_{i=1}^{n}\omega_i dx^i$$

のとき

$$\omega(X)=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\omega_i$$

であることから明らかである．したがってωは

$$F:\quad \mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{F}(M)$$

という写像を定め，この写像は $\mathfrak{F}(M)$ に関して線形

$$F(X+Y)=F(X)+F(Y);\qquad F(fX)=fF(X),\qquad f\in\mathfrak{F}(M)$$

であることが容易に確かめられる． 逆に， $\mathfrak{F}(M)$ に関して線形な写像 F: $\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{F}(M)$ に対して， 微分可能な1次微分形式 ω があって $F(X)=\omega(X)$ となることがわかる．

以下断らない限り，微分可能な1次微分形式だけを考える．

任意の $f\in\mathfrak{F}(M)$ に対し，その微分 df は

$$(df)(X)=Xf,\qquad X\in\mathfrak{X}(M)$$

で定義される1次微分形式である．

高次の微分形式を定義しよう．整数 $r>1$ に対し **r 次の微分形式**ωは写像

$$\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)\quad(r\text{ 回})\to\mathfrak{F}(M)$$

で，次の条件をみたすものである．

1) $\omega(X_1,\cdots,X_r)$ は，ベクトル場 $X_1,\cdots,X_r$ のうち $r-1$ 個を固定すると，残ったベクトル場の関数として $\mathfrak{F}(M)$-線形である．

2) $\omega(X_1,\cdots,X_r)$ は歪対称 (skew-symmetric) である． すなわち X_i と X_j とを入れかえると符号が変わる．

M 上のr次微分形式の全体を $\mathfrak{D}^r(M)$ で表す．$\mathfrak{D}^r(M)$ は自然な $\mathfrak{F}(M)$-加群としての構造をもつことは明らかであろう．$r>n$ に対しては $\mathfrak{D}^r(M)=(0)$ である．

$\mathfrak{D}(M)=\sum_{r=0}^{n}\mathfrak{D}^r(M)$ (直和) として，その中に**外積** (exterior product) を定義しよう．

$\omega_1 \in \mathfrak{D}^r(M)$, $\omega_2 \in \mathfrak{D}^s(M)$ のとき，写像

$$(X_1, \cdots, X_r, X_{r+1}, \cdots, X_{r+s}) \to \omega_1(X_1, \cdots, X_r)\omega_2(X_{r+1}, \cdots, X_{r+s})$$

を交代化して得られる写像を $\omega_1 \wedge \omega_2$ とする．たとえば $r=s=1$ のとき

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(X, Y) = \frac{1}{2}(\omega_1(X)\omega_2(Y) - \omega_2(X)\omega_1(Y))$$

である．

局所座標系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ に関して，r 次微分形式 ω は

$$\omega = \sum_{(i_1, \cdots, i_r)} \omega_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

ここで $1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqq n$ に関する和をとっている．

$\mathfrak{D}(M)$ において**外微分演算** (exterior differentiation) d は次のように定義される：

1)　$f \in \mathfrak{D}^0(M) = \mathfrak{F}(M)$ に対して df はすでに定義した f の微分である．

2)　d は $\mathfrak{D}^r(M) \to \mathfrak{D}^{r+1}(M)$ の R-線形写像である．

3)　$\omega_1 \in \mathfrak{D}^r(M)$, $\omega_2 \in \mathfrak{D}^s(M)$ に対して

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2$$

4)　$dd = 0$.

この性質 1) ～ 4) により演算 d は一意的にきまる．

$\omega \in \mathfrak{D}^r(M)$ が局所座標系に関して

$$\omega = \sum_{(i_1, \cdots, i_r)} \omega_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

であれば

$$d\omega = \sum_{(i_1, \cdots, i_r)} d\omega_{i_1 \cdots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

となる．特に $r=1$, $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i$ ならば

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} d\omega_i \wedge dx^i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i$$

$$= \sum_{j<i} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \right) dx^j \wedge dx^i$$

これと関連して次の公式は有用である．

公式 ω が1次微分形式ならば，任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$2\,d\omega(X, Y) = X\cdot\omega(Y) - Y\cdot\omega(X) - \omega([X, Y])$$

問. この公式と，局所座標系を用いた式とが同値であることを確かめよ．

微分形式に関して二，三の注意をつけ加える．

多様体 M から M' への微分可能写像 φ があるとき，各 r について $\mathfrak{D}^r(M') \to \mathfrak{D}^r(M)$ という線形写像がひきおこされる．$\omega' \in \mathfrak{D}^r(M')$ のとき，M の各点 p と $X_1, \cdots, X_r \in T_p(M)$ に対して

$$\varphi^*\omega'(X_1, \cdots, X_r) = \omega'((\varphi_*)_p X_1, \cdots, (\varphi_*)_p X_r)$$

とおくことによって，ω の**ひきもどし**（pull back）とよばれる M 上の微分形式 $\varphi^*\omega'$ が定まる．この写像 $\varphi^* : \mathfrak{D}(M') \to \mathfrak{D}(M)$ は

$$\varphi^*(\theta' \wedge \omega') = \varphi^*(\theta') \wedge \varphi^*(\omega')$$

$$\varphi^* d = d\varphi^*$$

という性質をもっていることが示される．

次に M の次元が n で，M 上にどの点でも0にならない n 次微分形式 ω が存在するならば，ω を**体積要素**（volume element）という．M の各点 p において ω_p は0でなく，r 重線形歪対称関数：

$$T_p(M) \times \cdots \times T_p(M) \to R$$

全体の作る1次元ベクトル空間の基をなしている．よって ω_p は接空間 $T_p(M)$ の一つの**方向づけ**（orientation）を定め，ω が微分可能したがって連続であることから，M のすべての接空間に連続的に方向づけを与えることができる．この意味で M は**方向づけ可能**（orientable）であり，ω とその任意の正値関数倍 $f\omega$ ($f \in \mathfrak{F}(M), f > 0$) は同じ方向づけを与えることになる．

最後に，任意の s 次元実ベクトル空間 V の値をとる微分形式と定義しておこう．V の値をとる r 次微分形式 ω とは写像

$$\omega : \quad \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M, V)$$

で r 重 $\mathfrak{F}(M)$-線形，歪対称なものである．ただしここで $\mathfrak{F}(M, V)$ は M 上の V の値をとる微分可能関数全体を表す．各点 p において ω_p は r 重線形，歪対称写像

$$T_p(M) \times \cdots \times T_p(M) \to V$$

を与えることになる．V の基 $\{e_1, \cdots, e_s\}$ を選んでおくと，V の値をとる r 次微分形式 ω は

$$\omega = \sum_{i=1}^{s} \omega^i e_i$$

（ここで $\omega^1, \cdots, \omega^s$ はそれぞれ r 次微分形式）という形に一意的にかくことができる．これを用いて

$$d\omega = \sum_{i=1}^{s} (d\omega^i) e_i$$

と外微分を定義する．これは V の基のとり方に無関係に定まる．

§5. テンソル場

最初に代数的準備をしておく．V を n 次元実ベクトル空間，V^* をその双対空間とする．V 上の (r, s) 型の**テンソル**（tensor of type (r, s)）とは $(s+r)$ 重線形関数

$$K:\ \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s\text{回}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r\text{回}} \to R$$

である．その全体は普通の加法とスカラー倍に関して実ベクトル空間 $T^r{}_s$ を作っている．V の基を $\{e_1, \cdots, e_n\}$，V^* の双対基を $\{e^1, \cdots, e^n\}$ とかくと関数 K は

(1) $$K(e_{j_1}, \cdots, e_{j_s}, e^{i_1}, \cdots, e^{i_r}) = K^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}$$
$$1 \leqq i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \leqq n$$

を知ることによって一意的に定まる．いま

$$F = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$$

によって

$$F(e_{k_1}, \cdots, e_{k_s}, e^{l_1}, \cdots, e^{l_r}) = \begin{cases} 1 & \begin{matrix} k_1 = j_1, \cdots, k_s = j_s \\ l_1 = i_1, \cdots, l_r = i_r \end{matrix} \text{のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

であるようなテンソルを表すと，これらの n^{r+s} 個のテンソルが $T^r{}_s$ の基を作

っていることがわかる．したがって任意の $K \in \boldsymbol{T}^r{}_s$ は (1) で与えられるその**成分** $K^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}$ を用いて

$$(2)\qquad K = \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r\\ j_1,\cdots,j_s}} K^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s}$$

という形にかき表せる．$\boldsymbol{T}^r{}_s$ の次元は n^{r+s} である．

特に $r=0, s=1$ のとき，$\boldsymbol{T}^0{}_1$ は V^* と同一視できる．$r=1, s=0$ のとき $\boldsymbol{T}^1{}_0$ は V と同一視できる．$r=s=0$ のときは $\boldsymbol{T}^0{}_0$ は R と同一視することにきめる．

$\boldsymbol{T}^1{}_s$ は s 重線形写像

$$V\times\cdots\times V\,(s\text{ 回})\to V$$

全体の作るベクトル空間と同一視することができる．そのために $K\in \boldsymbol{T}^1{}_s$ に対して

$$\langle \bar{K}(x_1,\cdots,x_s), y^*\rangle = K(x_1,\cdots,x_s,y^*)$$
$$x_1,\cdots,x_s\in V,\ y^*\in V^*$$

で定まる $\bar{K}(x_1,\cdots,x_s)\in V$ をとり，r 重線形写像

$$\bar{K}:\quad (x_1,\cdots,x_s)\in V\times\cdots\times V\to \bar{K}(x_1,\cdots,x_s)\in V$$

を対応させればよい（上式で $\langle x, y^*\rangle$ は $y^*\in V^*$ の $x\in V$ に対する値を表すものとする）．

特に $\boldsymbol{T}^1{}_1$ は V のそれ自身への線形写像全体の作るベクトル空間 $\mathfrak{gl}(V)$ と同一視できる．また $\boldsymbol{T}^1{}_s$ の元はまず　$\bar{K}: V\times\cdots\times V(s\text{ 回})\to V$　と考え，さらに $(s-1)$ 重線形写像

$$K':\quad V\times\cdots\times V\,((s-1)\text{ 回})\to \mathfrak{gl}(V)$$
$$K'(x_1,\cdots,x_{s-1})\cdot x = \bar{K}(x_1,\cdots,x_{s-1},x)$$

と考えることができる．

問　(1,2) 型のテンソル K を $V\to\mathfrak{gl}(V)$ と考えて，$x\in V$ に対し

$$f(x) = K(x)\text{ のトレース}$$

と定義すると，(0,1) 型のテンソルすなわち V^* の元 f が得られる．V のある基に関する K の成分を $(K^i{}_{jk})$ とすれば f の成分 f_j は

$$f_j = \sum_{i=1}^n K^i{}_{ji}$$

で与えられることを示せ．これを $K^i{}_{jk}$ の i と k に関する**縮約** (contraction) とよぶ．

問 $K^i{}_{jk}$ の i と j に関する縮約 $\sum_{i=1}^{n} K^i{}_{ik}$ に対する解釈を与えよ．

さて多様体 M にもどろう．M 上の (r, s) 型の**テンソル場** (tensor field) K とは，M の各点 p に対して接空間 $T_p(M)$ 上のある (r, s) 型のテンソル K_p を対応させる規則である．その微分可能性は，たとえば局所座標系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$をとり，$T_p(M)$ の基 $\{\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^n\}$ とその双対基 $\{dx^1, \cdots, dx^n\}$ に関する K の成分が座標 $(x^1, \cdots, x^n)$ の微分可能関数であるということによって定義できる．微分可能な $(1, s)$ 型のテンソル場は $\mathfrak{F}(M)$ に関して s 重線形写像

$$\underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{s\text{ 回}} \to \mathfrak{X}(M)$$

を自然にひきおこすが，逆にこのような写像は $(1, s)$ 型のテンソル場から得られることがわかる．

特に，恒等変換 $\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ は $(1,1)$ 型のテンソル場に対応し，その成分はどの局所座標系に関しても $(\delta^i{}_j)$ である．

$(0, 2)$ 型のテンソル場は双線形写像

$$g: \quad \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$$

であるが，これが二条件

1) 対称： $g(Y, X) = g(X, Y)$

2) 正値： $g(X, X)$ はすべての $X \in \mathfrak{X}(M)$ に関して非負，$g(X, X) = 0$ となるのは $X = 0$ のときに限る．

をみたすとき，M の**リーマン計量** (Riemannian metric) という．リーマン計量 g は各点 p の接空間 $T_p(M)$ に正値内積を定める．

第2可算公理をみたす多様体 M にはリーマン計量が存在する．これを証明するために，$\{U_\alpha\}$ を座標近傍からなる局所有限な開被覆とし，$\{\varphi_\alpha\}$ をそれに属する1の分割とする．各近傍 U_α にはその上のリーマン計量 g_α を選ぶことができる．たとえば座標系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ を使って

$$g_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\delta_{ij}$$

となる計量をとる．ここで $g=\sum_\alpha \varphi_\alpha g_\alpha$ とおけば g はリーマン計量であることがわかる．

§6. リー群

リー群 (Lie group) とは，群 G で同時に多様体であり，群の演算 $(x, y) \in G\times G \to xy^{-1}\in G$ が直積多様体 $G\times G$ から G への微分可能写像になっているものをいう．

リー群 G はその多様体としての位相に関して位相群 (topological group) になっている．単位元 e を含む連結成分 G^0 は閉集合であるが，G が局所連結だから G^0 は開集合でもある．したがって開部分多様体として G^0 自身リー群になっている．

G の元 a により

左移動 (left translation)　L_a:　$L_a(x)=ax$

右移動 (right translation)　R_a:　$R_a(x)=xa$

という G のそれ自身への変換を考えると，いずれも微分同相写像である．

ベクトル場 X は　$L_aX_x=X_{ax}$ (または $R_aX_x=X_{xa}$)　をすべての $a, x\in G$ に対してみたすとき，**左不変** (left invariant) または **右不変** (right invariant) とよぶ．ベクトル場を微分可能と仮定しなくても，左または右不変ならば微分可能になることがわかる．

問　上の微分可能性を証明せよ．

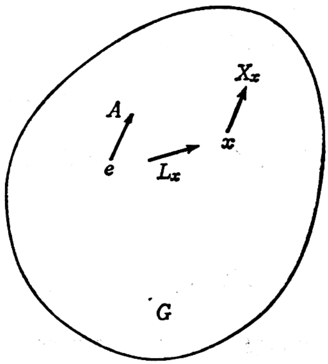
G 上の左不変なベクトル場の全体 $\mathfrak{g}$ は実ベクトル空間を作り，それは単位元 e における接空間 $T_e(G)$ と同形になる．すなわち，任意の $A\in T_e(G)$ に対して

$$X_x=(L_x)_*A, \qquad x\in G$$

によってベクトル場 X を定義すると，これは左不変だから $X\in\mathfrak{g}$. この対応 $A\to X$ (逆は $X_e=A$) が $T_e(G)$ と $\mathfrak{g}$ との線形同形写像である (1-5 図).

一方，$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{X}(G)$ の部分集合と考えると，$\mathfrak{X}(G)$ の括弧積に関して $X, Y\in$

$\mathfrak{g}$ ならば $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ であることがわかる．われわれはすでに $\mathfrak{X}(G)$ を無限次元のリー環とみなすことを知っているが，$\mathfrak{g}$ はそのリー部分環になっている．$\mathfrak{g}$ を有限次元（G と同じ次元）のリー環とみなしたとき，これをリー群 G のリー環とよぶ．



1-5 図

A を $\mathfrak{g}$ の任意の元とし，e の近傍 U で生成される局所的1助変数変換群を $\{\phi_t\}$ とする．A が任意の元 a による左移動 L_a により不変であることから，a の近傍 $aU = L_aU$ の上で，X が生成する局所的1助変数変換群 ψ_t は

$$\psi_t = L_a\phi_t L_a^{-1}$$

となることがわかる．特に，ϕ_t と ψ_t とは同じ t の範囲で定義されている．したがって，X は G の上で大局的な1助変数変換群を生成するから，それをあらためて ϕ_t とかけば，上の式から

$$\phi_t \cdot L_a = L_a \cdot \phi_t$$

いま，$a_t = \phi_t(e)$ $(-\infty < t < \infty)$ とおけば，上式を e に施して

$$\phi_t(a) = aa_t = R_{a_t}a$$

が得られる．$\phi_{t+s} = \phi_t\phi_s$ から $a_{t+s} = a_t a_s$ となり，したがって a_t は群 G の1助変数部分群とよぶものになっている．この a_t を $X \in \mathfrak{g}$ の生成する **1助変数部分群** (1-parameter subgroup) とよび，$\exp tX$ と記すことが多い．$X \to \exp X$ を **指数写像** (exponential mapping) という．

$a_t = \exp tX$ は幾何的にいって，左不変ベクトル場 X の積分曲線であるから，その接ベクトル a_t' は

$$a_t' = X_{a_t} = L_{a_t} \cdot X_e = L_{a_t} \cdot a_0'$$

をみたしている．これをかきかえると

(1) $\qquad a_t^{-1}a_t' = A \qquad$ ただし $A = a_0' \in T_e(G)$

となる．$T_e(G)$ の任意の元 A に対して，上の微分方程式を初期条件 $a_0 = e$ として解くことにより $a_t = \exp tA$ が求まる．

例として，一般線形群 $GL(n, R)$ をとる．前にみたように，これは R^{n^2} の開部分多様体で，行列 $a=[a^i_j]$ の n^2 個の成分が $GL(n, R)$ 全体の上の座標系を作っている．$GL(n, R)$ の曲線 a_t に対し，各点での接ベクトルは da/dt で表されるから，微分方程式 (1) は

$$a_t^{-1}\frac{da}{dt}=A, \qquad A\in\mathfrak{gl}(n, R)$$

となる．初期条件 $a_0=I_n$（単位行列）をもつ解は，行列に対する指数関数

$$\exp tA=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}$$

に他ならない．

リー群 G の**リー部分群** (Lie subgroup) とは，G の部分群 H で，包含写像 $H\to G$ がはめこみであるような多様体構造に関して，H 自身がリー群であるようなもののことである．一般に H の位相は G からの相対位相とは限らない．

リー部分群 H に対して

$$\mathfrak{h}=\{X\in\mathfrak{g};\, X_e\in T_e(H)\}$$

は $\mathfrak{g}$ のリー部分環になり，また H 自身のリー環と同一視することができる．逆に，リー群 G のリー環 $\mathfrak{g}$ のリー部分環 $\mathfrak{h}$ が与えられているとしよう．G の各点 a に対して

$$\varDelta_a=\{X_a;\, X\in\mathfrak{h}\}\subset T_a(G)$$

を対応させることによって $\mathfrak{h}$ と同じ次元の接分布 $\varDelta$ が得られる．$\varDelta$ は微分可能，完全積分可能で，単位元 e を通る極大積分多様体を H とすると H は G の部分群であり，事実 G のリー部分群になっていることが証明される．H を $\mathfrak{h}$ から生成されるリー部分群という．

リー群 G の部分群 H がどのようなときにリー部分群になるかという問題に関して次の定理がある．

定理 1　H が弧状連結（正確にいえば，H の 2 点 a, b に対して区間 $[0,1]$ から G の中への連続写像 $t\to f(t)$ があり，$f(0)=a$, $f(1)=b$, $f([0,1])\subset H$ となる）ならば H はリー部分群である．

定理 2 H が閉部分群ならばリー部分群であり，その位相は G からの相対位相と一致する.

定理 2 の特別の場合として実際上有用なのは，部分群 H が局所部分多様体構造をもち，したがってうめこまれた部分多様体になっている場合である．例としてすでに §2 でみたように，$SL(n, R), O(n)$ が $GL(n, R)$ のリー部分群になる.

ここで，**リー変換群** (Lie transformation group) のことに簡単に触れておこう.

リー群 G が多様体 M に作用するとは，G の各元 a に対して M の変換（それ自身への微分同相写像）φ_a が対応し $\varphi_{ab}=\varphi_a\cdot\varphi_b$ がすべての $a, b\in G$ に対して成り立ち，さらに写像

$$(a, x)\in G\times M \to \varphi_a(x)\in M$$

が微分可能であることである.

このとき G の単位元 e に対応する変換 φ_e は M の恒等変換である．逆に，φ_a が恒等変換ならば $a=e$ という条件が成り立つとき，G は **効果的** (effective) であるという.

G が M に作用するとき，M の 1 点 x_0 に対して

$$H(x_0)=\{a\in G;\ \varphi_a(x_0)=x_0\}$$

を x_0 における **固定群** (isotropy group) とよぶ．固定群は閉リー部分群である.

多様体 M が与えられたとき，その変換の全体はリー群にはなりえないが，M の上に何らかの幾何的構造が与えられているとき，その構造を保つような変換の全体がリー群になることがありえる．たとえば，多様体 M に一つのリーマン計量 g が与えられているとする．M の変換 φ が g を保つとは

$$g(\varphi_*X, \varphi_*Y)=g(X, Y)$$

が任意の点 x における任意の接ベクトル X, Y に対して成り立つことである．このとき φ を g に関する **等長変換** (isometry) という．g に関する等長変換全体はリー群になることが知られている.

リー群Gが与えられたとき，各元aに対してそれがひきおこす内部自己同形 $x \to axa^{-1}$ はもちろん微分可能な写像である．これがリー環 $\mathfrak{g}$ にひきおこす変換を $\mathrm{ad}(a)$ で表す．$a \to \mathrm{ad}(a)$ は G の $GL(\mathfrak{g})$ の中への準同形写像で**随伴表現** (adjoint representation) とよばれる．

$A \in \mathfrak{g}$ が生成する1助変数部分群を a_t とすると，任意の $B \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[B, A] = \lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{ad}(a_t^{-1})B - B}{t} \tag{2}$$

が成り立つ（これは §3 の定理からわかる）．

G をリー群，H を一つの閉リー部分群とする．このとき G において

$$x \sim y \quad \text{とは} \quad x^{-1}y \in H \quad \text{であること}$$

によって同値関係を定義することができる．その同値類全体を G/H とかく．各元xに対してそれを含む同値類は xH である．G から G/H への自然な射影 $x \to xH$ をπで表す．G/H は商空間としての位相をもつ．

また G の元 a による G の左移動 L_a は G/H の1対1写像 $xH \to axH$ をひきおこす．これを φ_a で表すことにする．

このとき次の定理が知られている．

定理 3　G/Hには，次の条件をみたすような微分可能構造が一意的に存在する：

1)　$\pi : G \to G/H$ は微分可能である．

2)　$(a, p) \in G \times G/H \to \varphi_a(p) \in G/H$ は微分可能写像である．

3)　G/H の任意の点pに対し，その近傍UとUからGへの微分可能写像 σ で $\pi(\sigma(q)) = q$ $(q \in U)$ となるものが存在する．

条件 3) の σ を U からの**切り口** (section) とよぶ．条件 2) は前にのべた意味で，G が G/H に作用していることを意味する．多様体 G/H を G の**等質空間** (homogeneous space) という．

この定理により，リー群 G とその任意の閉リー部分群 H から多様体 G/H の例をたくさん作ることができることになる．一方，幾何的な意味から構成できるいろいろの空間が，古典的なリー群（たとえば $GL(n, R)$ や $SO(n)$）の

商空間として表され，したがって定理のような多様体構造をもつことになる．一つの例をあげよう．

まず n 次元ベクトル空間 R^n の上の正値内積全体の集合を M で表そう．群 $GL(n,R)$ は集合 M の変換群になっている．すなわち $a\in GL(n,R)$ は，一つの内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\langle x,y\rangle'=\langle a^{-1}x,a^{-1}y\rangle,\qquad x,y\in R^n$$

で定義される内積 $\langle\ ,\ \rangle'$ にうつす．この M の変換を φ_a とかけば $\varphi_{ab}=\varphi_a\varphi_b$ であることがわかる．また任意の二つの内積に対して，一方を他方にうつすような $GL(n,R)$ の元が存在することも容易にわかる．したがっていま標準内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を固定し，この M の元を p_0 で表して

$$a\in GL(n,R)\to\varphi_a(p_0)\in M$$

という写像を考える．p_0 を固定する a の全体は直交群 $O(n)$ に他ならず，これから1対1の対応

$$f:\quad GL(n,R)/O(n)\leftrightarrow M$$

がひきおこされる．したがって内積全体の空間 M を等質空間 $GL(n,R)/O(n)$ と同一の多様体と考えることができる．一方，M は n 次正値対称行列の全体 $\mathfrak{p}(n)$ と同一視することもできる．n 次対称行列全体 $\mathfrak{s}(n)$ は $n(n+1)/2$ 次元の実ベクトル空間を作りその中で $\mathfrak{p}(n)$ は開集合を作っているから $R^{n(n+1)/2}$ の開部分多様体と考えることができる．

$X\in\mathfrak{s}(n)$ に対し $\exp X\in\mathfrak{p}(n)$ であるが，実は指数関数 exp は $\mathfrak{s}(n)$ から $\mathfrak{p}(n)$ の上への微分同相写像を与えることが証明できる．

§7. 主ファイバー束

多様体 M の上の，リー群 G を構造群とする主ファイバー束 P を定義しよう．P 自身も多様体である．

1) リー群 G は P の上に作用している．この作用を便宜上右側にかく．すなわち微分可能な写像

$$(u,a)\in P\times G\to ua\in P$$

があり，$a\in G$ をきめると

$$R_a: \quad u \in P \to ua \in P$$

は微分同相写像であり，

$$(ua)b = u(ab) \qquad \text{すなわち} \qquad R_{ab} = R_b R_a$$

さらに，$a \in G$, $a \neq e$（単位元）ならば変換 R_a は不動点をもたないと仮定する．このときGはPの上に**自由に**（freely）作用するという．

2) PからMの上への微分可能写像 π があり，$u, v \in P$ に対して $\pi(u) = \pi(v)$ となるのはある $a \in G$ が存在して $v = ua$ となるとき，かつそのときに限る．このπを**射影**（projection）とよぶ．

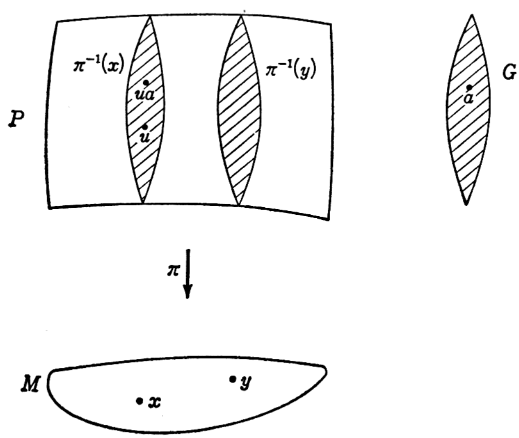
3) P は局所的に直積である．すなわち，M の各点 x に対してある近傍 U があり，$\pi^{-1}(U)$ は次の意味で直積 $U \times G$ と同形である：微分同相写像

$$u \in \pi^{-1}(U) \to (\pi(u), \varphi(u)) \in U \times G$$

があり，$\varphi(ua) = \varphi(u)a$ がすべての $u \in \pi^{-1}(U)$, $a \in G$ に対して成り立つ．

これらの条件の成り立つとき M を**底空間**（base space），G を**構造群**（structure group），P を**主ファイバー束**（principal fiber bundle）またはその**全空間**（total space）という．

いま $x \in M$ として，$\pi(u) = x$ となる P の点uをとると条件 2) から



1-6 図

$$\pi^{-1}(x)=\{ua;\, a\in G\}$$

となる．条件 1) により，$ua=ub$ となるのは $u(ab^{-1})=u$ のときすなわち $ab^{-1}=e$ したがって $a=b$ のときに限る．ゆえに u を固定したとき

$$a\in G\to ua\in\pi^{-1}(x)$$

は G から $\pi^{-1}(x)$ の上への微分同相写像である．$\pi^{-1}(x)$ を x の上の**ファイバー** (fiber) とよぶ．各ファイバーは G と微分同相である (1-6 図)．

条件 3) を説明するために，任意の多様体 M とリー群 G とが与えられたとき，直積多様体 $P=M\times G$ をとり，P の G 上の作用を

$$(x,g)a=(x,ga),\qquad (x,g)\in P, a\in G$$

と定義する．また $\pi(x,g)=x$ とする．条件 1), 2) は明らかにみたされており，条件 3) は $U=M$ と考えて自明である．この P を**直積主ファイバー束**または**自明な主ファイバー束** (trivial principal fiber bundle) という．

条件 3) は $\pi^{-1}(U)$ が直積主ファイバー束 $U\times G$ と同形であることを要請している．

例として，リー群 G とその閉部分リー群 H が与えられたとき，G を $M=G/H$ の上の構造群が H であるような主ファイバー束と考えることができることを示そう．まず H を G の上で右移動により作用させる．$h\in H$ に対し

$$R_h:\quad g\in G\to gh\in G$$

とする訳である．G から $M=G/H$ への射影を π とすると，1), 2) の条件は容易に満足されている．条件 3) を確かめるためにいま M の 1 点 x をとると，§6 の定理 3 により x の近傍 U から G への切り口 σ が存在する．ここで $g\in\pi^{-1}(U)$ に対して

$$\varphi(g)=(\sigma(\pi(g)))^{-1}g\in H$$

とすれば，$\varphi(gh)=\varphi(g)h$ $(h\in H)$ が成り立つ．したがって

$$g\in\pi^{-1}(U)\to(\pi(g),\varphi(g))\in U\times H$$

は条件 3) をみたす微分同相写像である．

いま，主ファイバー束 $P(M,G)$ が与えられたとき，条件 3) により M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ があり，各 α について

$$u \in \pi^{-1}(U_\alpha) \to (\pi(u), \varphi_\alpha(u)) \in U_\alpha \times G$$

が同相写像を与える．$U_\alpha \cap U_\beta$ が空でなければ，$u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ に対し

$$\varphi_\beta(ua)(\varphi_\alpha(ua))^{-1} = \varphi_\beta(u)aa^{-1}(\varphi_\alpha(u))^{-1} = \varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1}$$

であるから，$\varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1}$ は $U_\alpha \cap U_\beta$ 上の各ファイバーの上で定値，したがって微分可能写像

（1）　$$x \in U_\alpha \cap U_\beta \to \psi_{\beta\alpha}(x) \in G$$

をひきおこす．$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ が空でなければ

（2）　$$\psi_{\gamma\alpha}(x) = \psi_{\gamma\beta}(x)\psi_{\beta\alpha}(x), \qquad x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$$

が成り立つことが容易に確かめられる．

写像の族 $\{\psi_{\beta\alpha}\}$ を $\{U_\alpha\}$ に対応する**座標変換**または**変換関数**（transition function）とよぶ．

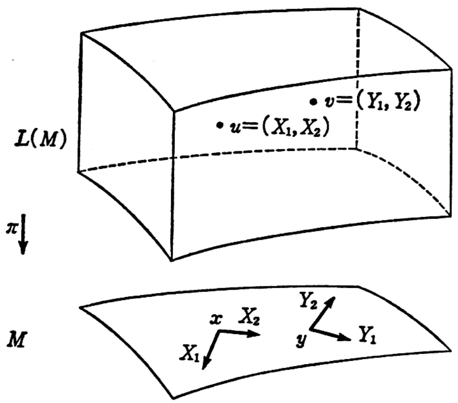
少し見方をかえて，各 α について，$x \in U_\alpha$ に対し $\rho_\alpha(x) \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ を

$$\pi(\rho_\alpha(x)) = x, \qquad \varphi_\alpha(\rho_\alpha(x)) = e \quad (\text{単位元})$$

となるような元（一意的）と定義する．ρ_α は微分可能で U_α 上の**切り口**（section）とよぶ．このとき $U_\alpha \cap U_\beta$ が空でなければ，その上で

$$\sigma_\alpha(x) = \sigma_\beta(x)\psi_{\beta\alpha}(x), \qquad x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

という関係が成り立つことになる（1-7 図）．



1-7 図

問　上式を確かめよ．

さて，多様体 M とリー群 G が与えられたとき，主ファイバー束 $P(M, G)$ は一般にどのようにして構成できるであろうか？　M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と微分可能写像 (1) の族 $\{\psi_{\beta\alpha}\}$ が与えられていて，条件 (2) が満足されているとする．このとき，$\{\psi_{\beta\alpha}\}$ を座標変換としてもつような主ファイバー束 $P(M, G)$ を次のようにして作ることができる．

まず，(2) から

(3) $$\psi_{\alpha\alpha}(x)=e, \qquad x\in U_\alpha$$

(4) $$\psi_{\alpha\beta}(x)\psi_{\beta\alpha}(x)=e, \qquad x\in U_\alpha\cap U_\beta$$

を導くことができる.

さて各 α に対して直積多様体 $U_\alpha\times G$ を X_α で記し

$$X=\bigcup_\alpha X_\alpha$$

を位相和とする. すなわち $\alpha\neq\beta$ ならば X_α と X_β とは共通部分をもたないと考えて，すべての X_α の和集合をとり，その和 X の中で各 X_α の開集合を X の開集合にするような位相を導入するのである. 各 X_α が多様体であるから X もまた多様体になる. X の中で

(5) $(x,a)\in U_\alpha\times G\subset X$ と $(y,b)\in U_\beta\times G\subset X$ とは $x=y$ かつ $b=\psi_{\beta\alpha}(x)a$ であるときに同値である.

として同値関係 ρ を定義する（これが同値関係であることは (2), (3), (4) からわかる).

X の ρ による商空間を P とし，P が多様体で求める主ファイバー束であることを証明しよう.

初めは，P の微分可能構造のことはさしおいて，まず G を P に右側に作用させる. それには $(x,a)\in U_\alpha\times G$ を含む同値類を $u=\rho(x,a)$ とかいたとき

(6) $$ug=\rho(x,a)g=\rho(x,ag), \qquad g\in G$$

とする. $g\neq e$ ならば g による変換は不動点をもたないことが確かめられる.

P の点 $u=\rho(x,a)$ $((x,a)\in U_\alpha\times G)$ に対し $\pi(u)=\pi(\rho(x,a))=x$ とおくことによって，P から M への射影を定義する. いま $u=\rho(x,a)$ $((x,a)\in U_\alpha\times G)$, $v=\rho(y,b)$ $((y,b)\in U_\beta\times G)$ とするとき $\pi(u)=\pi(v)$ ならば $x=y$, したがって $\rho(x,a)=\rho(x,\psi_{\beta\alpha}(x)a)$. 適当な $g\in G$ があって $\rho(x,\psi_{\beta\alpha}(x)a)=\rho(x,b)g$ だから $u=vg$. 逆に $u=vg$ ならば $\pi(u)=\pi(v)$ であることは容易にわかる.

同値関係 ρ は各 X_α の上では恒等関係（二元が同値ならば同じ元）であるから，$\pi^{-1}(U_\alpha)$ は $\rho(x,a)$ $(x\in U_\alpha, a\in G)$ の全体であり $U_\alpha\times G$ と1対1に

対応する．

さて，$\pi^{-1}(U_\alpha)$ が $U_\alpha\times G$ と微分同相になるような微分可能構造をもつような P の開部分多様体になっているという条件で，P に微分可能構造を入れることができる．それは任意の $u\in P$ がある $\pi^{-1}(U_\alpha)$ に含まれていることと，$(x,a)\in U_\alpha\times G$ と $(y,b)\in U_\beta\times G$ とが ρ で同値（したがって P の元として同じ）になるのは $y=x$, $b=\psi_{\beta\alpha}(x)a$ となるとき，したがって写像

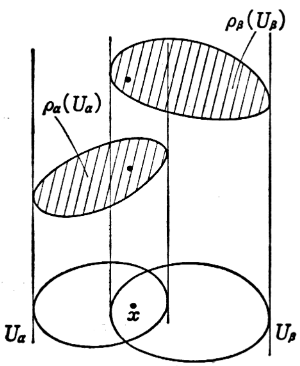
$$(x,a)\to(x,\psi_{\beta\alpha}(x)a)$$

がその逆とともに微分可能だからである．

このように P を多様体と考えると，P が M の上の構造群 G の主ファイバー束になっている条件を確かめるのはやさしい．

第3章で重要な役割を演じる主ファイバー束である多様体 M の**接 n 枠束** $L(M)$（bundle of frames）を定義し，その座標変換 $\psi_{\beta\alpha}$ を説明しよう．

M を n 次元多様体とする点 x における接 n 枠（frame）とは接空間 $T_x(M)$ の基のことである．M のすべての点での接 n 枠の全体を $L(M)$ とし，



1-8 図

$u\in L(M)$ が M の点 x での接 n 枠 $(X_1,\cdots,X_n)$ のとき $\pi(u)=x$ によって射影 $\pi:L(M)\to M$ を定義する（1-8 図）．

一般線形群 $GL(n,R)$ の元を $a=[a^i{}_j]$, $b=[b^i{}_j]$ とするとき，積 ab は

$$(ab)^i{}_j=\sum_{k=1}^n a^i{}_k b^k{}_j,\qquad 1\leqq i,\ j\leqq n$$

で定義されている．いま $GL(n,R)$ の $L(M)$ における右側の作用を

$u=(X_1,\cdots,X_n)$ が点 x での接 n 枠 $a\in GL(n,R)$ のとき $ua=(Y_1,\cdots,Y_n)$ は点 x での接 n 枠で，

$$(7)\qquad Y_j=\sum_{i=1}^n a^i{}_j X_i,\qquad 1\leqq j\leqq n$$

によって定義する．単位行列以外の元は不動点をもたない．また，$u=(X_1,$

$\cdots, X_n)$, $v=(Y_1, \cdots, Y_n)$ が共に点 x での接 n 枠ならば，ある $a\in GL(n, R)$ が存在して $v=ua$ となることも当然である．

U_α が座標系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ をもつ近傍であるとき，U_α の任意の点 x での任意の接 n 枠 $u=(X_1, \cdots, X_n)$ は

$$X_j=\sum_{i=1}^n a^i{}_j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \qquad 1\leqq j\leqq n \tag{8}$$

とかき表すことができる．したがって

$$u\in\pi^{-1}(U_\alpha)\rightarrow(x, a)\in U_\alpha\times GL(n, R) \tag{9}$$

とすれば，この写像は $\pi^{-1}(U_\alpha)$ から $U_\alpha\times GL(n, R)$ の上への1対1写像になる．

U_β が座標系 $\{y^1, \cdots, y^n\}$ をもつ近傍で $U_\alpha\cap U_\beta$ が空でなければ点 $x\in U_\alpha\cap U_\beta$ での接 n 枠 $u=(X_1, \cdots, X_n)$ は (8) および

$$X_j=\sum_{i=1}^n b^i{}_j\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right), \qquad 1\leqq j\leqq n \tag{10}$$

で表される．ここで

$$\psi_{\beta\alpha}(x)=\left[\frac{\partial y^j}{\partial x^k}\right]\in GL(n, R) \tag{11}$$

とおく．(8), (10) から

$$b^k{}_j=\sum_{i=1}^n\frac{\partial y^k}{\partial x^i}a^i{}_j$$

すなわち $GL(n, R)$ の中で

$$b=\psi_{\beta\alpha}(x)a \tag{12}$$

という関係が得られる．いいかえれば，同じ接 n 枠を別の局所座標系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$, $\{y^1, \cdots, y^n\}$ について表したときの関係が座標変換 $\psi_{\beta\alpha}$ によって与えられることになる．

さて $L(M)$ を多様体と考えるためには，M の座標近傍 U_α による被覆 $\{U_\alpha\}$ をとり

$$L(M)=\bigcup_\alpha\pi^{-1}(U_\alpha)$$

とする．各 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ を開集合とし，(9) が微分同相写像になるような微分可能構造を与えると，$\pi^{-1}(U_\alpha)\cap\pi^{-1}(U_\beta)$ における変換

$$(u, a) \to (u, \psi_{\beta\alpha}(u)a)$$

が，その逆と共に微分可能であるから $L(M)$ に微分可能構造が入ることになる．この構造に関して $L(M)$ が M 上の $GL(n, R)$ を構造群とする主ファイバー束になることは容易に確かめることができよう．

$L(M)$ の別の解釈として，$u = (X_1, \cdots, X_n) \in L(M)$ が点 $x \in M$ での接 n 枠であるとき，これを線形同形写像

$$R^n \to T_x(M)$$

で R^n の標準基 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots$, $e_n = (0, \cdots, 0, 1)$ をそれぞれ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ にうつすようなものと考えることにする．$a \in GL(n, R)$ に対し

$$ua = (Y_1, \cdots, Y_n)$$

を (7) のように定義したが，ua を $R^n \to T_x(M)$ の線形同形写像と考えると

$$(ua)(e_j) = Y_j = \sum_{i=1}^n a^i{}_j X_i$$

$$= \sum_{i=1}^n a^i{}_j u(e_i) = u(\sum_{i=1}^n a^i{}_j e_i)$$

であるから，ua は $a : R^n \to R^n$ と $u : R^n \to T_x(M)$ との合成であると考えられる．

最後に，一般の主ファイバー束 $P(M, G)$ で基本ベクトル場とよばれるものを定義しておこう．

構造群 G は P の上に右側に作用している．いま G のリー環（左不変ベクトル場の全体）を $\mathfrak{g}$ とする．その元 A に対して $a_t = \exp tX$ とし，P の1助変数変換群 $R_{a_t} : u \to ua_t$ がひきおこす P 上のベクトル場を A^* とし，これを A に対応する**基本ベクトル場** (fundamental vector field) とよぶ．

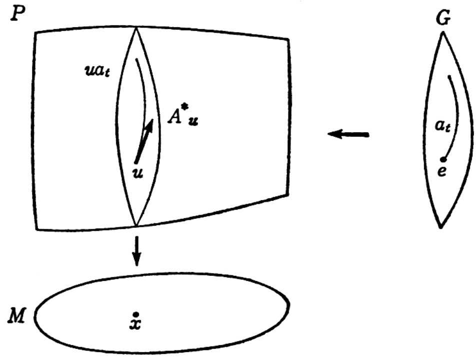
定義から，A^*_u は曲線 ua_t の $t = 0$ における接ベクトルであるから，u におけるファイバーを G_u とかけば $A^*_u \in T_u(G_u)$ である．すでに知っているように u をきめたとき

$$a \in G \to ua \in G_u$$

は微分同相写像だからその微分

$$\mathfrak{g} = T_e(G) \to T_u(G_u)$$

は線形同形写像であり，したがって A^*_u は $A \neq 0$ ならばどの点でも 0 にならない（1-9 図）．



1-9 図

この対応 $A \to A^*$ について次の二つの事柄を証明しておく．

補題 1 $a \in G$, $B \in \mathfrak{g}$ ならば，$(R_a)_* B^*$ は $\mathrm{ad}(a^{-1})B$ に対応する基本ベクトル場である．

［証明］ $b_t = \exp tB$ とする．P の点 u において

$$((R_{a*})B^*)_u = (R_a)_* B^*_{ua^{-1}}$$

ここで $B^*_{ua^{-1}}$ は曲線 $ua^{-1}b_t$ の $t=0$ における接ベクトルであるから，その $(R_a)_*$ による像は，曲線 $R_a(ua^{-1}b_t) = ua^{-1}b_t a$ の $t=0$ における接ベクトルである．ところが

$$a^{-1}b_t a = \exp(t\,\mathrm{ad}(a^{-1})B)$$

であるから，$ua^{-1}b_t a$ の $t=0$ における接ベクトルは基本ベクトル場 $(\mathrm{ad}(a^{-1})B)^*$ の u における値に他ならない．

補題 2 $A, B \in \mathfrak{g}$ に対し $[A, B]^* = [A^*, B^*]$

［証明］ $a_t = \exp tA$ とする．§6 の式 (2) から

$$[A, B] = \lim_{t \to 0} \frac{B - \mathrm{ad}(a_t^{-1})B}{t}$$

一方，§3 の定理 2 から

$$[A^*, B^*] = \lim_{t \to 0} \frac{B^* - (R_{a_t})_* B^*}{t}$$

補題 1 を使うとこれは

$$= \lim_{t \to 0} \frac{B^* - (\mathrm{ad}(a_t^{-1})B)^*}{t}$$

だから

$$[A, B]^* = [A^*, B^*]$$

を得る．

§8. ファイバー束

与えられた主ファイバー束 $P(M, G)$ からそれに**同伴したファイバー束** (fiber bundle associated to $P(M, G)$) とよばれるものを次のようにして構成する.

いま F がある多様体で G がその上に (左側に) 作用しているとする. この作用を

$$(a, \xi) \in G \times F \to a\xi \in F$$

とかく. したがって $(ab)\xi = a(b\xi)$ が $(a, b \in G, \xi \in F)$ に対して成り立つ.

このとき F を (**標準**) **ファイバー** (standard fiber または単に fiber) とし, $P(M, G)$ に同伴したファイバー束とよばれるものは次のように作られる.

まず各 $a \in G$ に対し

$$(u, \xi) \in P \times F \to (u, \xi)a = (ua, a^{-1}\xi) \in P \times F$$

として, G の $P \times F$ における右側の作用を定義する. この作用により $P \times F$ に同値関係

$(u, \xi) \sim (v, \eta)$ とは, ある $a \in G$ によって $v = ua$, $\eta = a^{-1}\xi$ となること

と定義する. 同値類全体の集合に商位相を入れた商空間を $E = P \times F/G$ とする (その微分可能構造はあとで考える). (u, ξ) の同値類を $\pi(u) \in M$ にうつす写像 $\pi_E : E \to M$ を射影という.

M の各点 x に対し $\pi_E^{-1}(x)$ は $\pi(u) = x$ となる P の点 u と任意の $\xi \in F$ をとり, (u, ξ) の同値類の全体である. いま $\pi(u_0) = x$ となる u_0 を一つきめると他の u は $u = u_0 a$ $(a \in G)$ の形で, (u, ξ) は $(u_0, a\xi)$ と同値であるから, 結局 $\pi_E^{-1}(x)$ は (u_0, ξ) $(\xi \in F)$ のきめる同値類全体であるとしてよい.

P が局所直積であることから, M の任意の点 x にはその近傍 U があって $\pi^{-1}(U)$ が $U \times G$ と同形になる. このことから, $\pi_E^{-1}(U)$ は $U \times F$ と位相同相になる. したがって $\pi_E^{-1}(U)$ が $U \times F$ と微分同相であるような開部分多様体になるという条件で, E の微分可能構造を定義することができる. これに関して, 射影 $\pi_E : E \to M$ は微分可能である.

この E を M の上の P に同伴したファイバー F, 構造群 G のファイバー束

とよぶ．M の各点 x に対し $\pi_E^{-1}(x)$ を x の上のファイバーとよぶ．

P の点 u はファイバー F から $x=\pi(u)\in M$ の上の E の，ファイバー $\pi_E^{-1}(x)$ の上への微分同相写像と考えることができる．すなわち $\xi\in F$ を (u,ξ) の同値類にうつす写像である．これが $\pi_E^{-1}(x)$ の上への写像であることは前にみたが，1対1であることも明らかである．G の元 a に対して写像 ua は

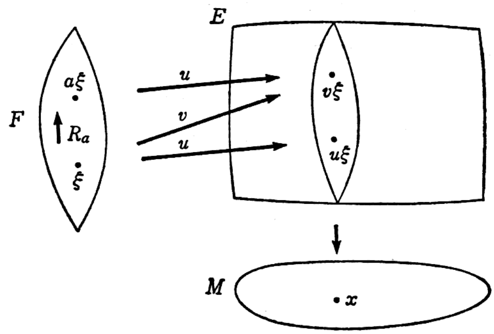
$$(ua)\xi=u(a\xi),\qquad \xi\in F$$

を満足している．

M の点 x をきめたとき，$u\in\pi^{-1}(x)$ によって与えられる写像 $F\to\pi_E^{-1}(x)$ の全体を考えると，その二つの写像 u,v の間には $v=ua$ という G の元 a があり，

$$u^{-1}v=a$$

となっている．すなわち写像 u,v の違いは G に属するある変換である（1-10 図）．



1-10 図

このことから，たとえば F に G によって不変な構造があれば，その構造は M の各点 x の上のファイバー $\pi_E^{-1}(x)$ にうつすことができる．多様体 F の G により不変な構造を F の一つの幾何と考えるとき（これが有名なクラインのエルランゲンプログラム（Klein's Erlangen program）に含まれる考え方であるが），この幾何を $\pi_E^{-1}(x)$ の上にも作ることができる．ファイバー束 E は，多様体 M の各点 x に本質的に同じ幾何をもった空間 $\pi_E^{-1}(x)$ が付属しているものの全体と考えることができる．おおざっぱにいって，これがエリー・カルタン (Elie Cartan) の一般化された幾何学の考え方である．

ファイバー束の重要な例として**ベクトル束** (vector bundle) とよばれるものがある．

主ファイバー束 $P(M,G)$ の構造群 G が有限次元の実（または複素）ベクト

ル空間 $V=R^m$（または C^m）に線形に作用しているとしよう．すなわち微分可能な準同形写像

$$\rho:\quad a\in G\to\rho(a)\in GL(m,R)\quad (\text{または } GL(m,C))$$

があり，$a\in G$ は $\xi\in R^m$（または C^m）を $\rho(a)\xi$ にうつす．

このベクトル空間 V をファイバーとして，$P(M,G)$ に同伴したファイバー束をベクトル束という．M の各点 x の上のファイバー $\pi_E^{-1}(x)$ は，V と同形なベクトル空間と考えることができる．前述のように $\pi(u)=x$ となる P の点 u により $V\to\pi_E^{-1}(x)$ という写像を得るが，これにより V のベクトル空間としての構造を $\pi_E^{-1}(x)$ にうつすことによって $\pi_E^{-1}(x)$ がベクトル空間となる．この構造は u のとり方に無関係である．

一般にファイバー束 E があるとき，微分可能写像 $\sigma: M\to E$ で $\pi_E\cdot\sigma$ が恒等変換であるものを E の **切り口**（section）とよぶ．

ベクトル束の場合は切り口の全体 Sec (E) はベクトル空間になる．$\sigma,\tau\in$ Sec (E) に対して

$$(\sigma+\tau)(x)=\sigma(x)+\tau(x),\qquad x\in M$$
$$(c\sigma)(x)=c\sigma(x),\qquad c\in R\ (\text{または } C)$$

と定義するわけである．

二，三の例をあげよう．

（i） 接ベクトル束　n 次元多様体 M の接 n 枠束 $L(M)$ の構造群 $GL(n,R)$ は R^n 上に自明のしかたで作用している．これをファイバーとして $T(M)$ に同伴するファイバー束 E を作ると，それは M の **接ベクトル束**（tangent bundle）$T(M)$ である．

$L(M)$ の元 u は R^n から $T_x(M)$ $(x=\pi(u))$ への線形写像 $\xi\in R^n\to u(\xi)\in T_x(M)$ を与える．一方，E の構成において $(u,\xi)\in L(M)\times R^n$ と $(v,\eta)\in L(M)\times R^n$ とが同値なのは，ある $a\in GL(n,R)$ につき $v=ua$, $\eta=a^{-1}\xi$ のとき，したがって $u(\xi)=(ua)(a^{-1}\eta)=v(\eta)$ のときであるから，(u,ξ) の同値類で表される E の元と $u(\xi)\in T_x(M)$ とを対応させることにより，E は $\bigcup_x T_x(M)$ と同一視できることになる．

なお $T(M)$ の切り口は M 上のベクトル場に他ならない．

（ii）**テンソル束**　R^n 上の (r, s) 型のテンソル空間を $\boldsymbol{T}^r{}_s$ で表す．$GL(n, R)$ の R^n 上の作用は自然に $\boldsymbol{T}^r{}_s$ 上の作用に拡張することができる．これをファイバーとする $L(M)$ に同伴したベクトル束 $\boldsymbol{T}^r{}_s(M)$ のことを，M 上の (r, s) 型の**テンソル束** (tensor bundle) とよぶ．M の各点 x の上のファイバーは接空間 $T_x(M)$ 上の (r, s) 型のテンソル空間と考えてよい．$\boldsymbol{T}^r{}_s(M)$ の切り口は (r, s) 型のテンソル場に他ならない．

（iii）$P = L(M)$，F を等質空間 $GL(n, R)/O(n)$ とする．§6 でみたように F は R^n 上の正値内積全体の空間と考えられる．F をファイバーとする $L(M)$ に同伴したファイバー束を E とする．M の各点 x 上のファイバー $\pi_E{}^{-1}(x)$ は接空間 $T_x(M)$ 上の正値内積全体の空間と同一視することができる．したがって切り口 $M \to E$ は M 上のリーマン計量のことに他ならない．実際，M が第2可算公理をみたすとき，このような切り口が存在することは，前でみたように $GL(n, R)/O(n)$ が $n(n+1)/2$ 次元ユークリッド空間に微分同相であることと，次の一般定理から従う．

定理 1　E をファイバー束とする．M が第2可算公理をみたし，ファイバー F がユークリッド空間に微分同相ならば切り口が存在する．

最後に，主ファイバー束 $P(M, G)$ の構造群 G の**縮小** (reduction) を説明しよう．別に主ファイバー束 $Q(M, H)$ があり，その構造群 H は G のリー部分群であると仮定する．Q から P への1対1の微分可能写像 f があり

$$f(ua) = f(u)a, \qquad u \in Q, a \in H$$

をみたし，したがって φ のひきおこす M のそれ自身への写像が恒等写像であるとき，Q は P の**部分束** (subbundle) であるという $P(M, G)$ がこの意味での部分束 $Q(M, H)$ をもつとき，$P(M, G)$ の構造群 G はそのリー部分群 H に縮小できるという．

$Q(M, H)$ が $P(M, G)$ の部分束であるとき，リー群 H がそれより大きいリー群 G の上に左側に作用していると考え，Gをファイバーとする Q に同伴したファイバー束 E を作ると，これが $P(M, G)$ と同一視できる．（抽象的に E を構成するとき $(u, a) \in Q \times G$ の同値類である E の元は，$Q \subset P$ と考え

て得られる P の元 ua と同一視することになる. 詳しい議論は省略する).

主ファイバー束 $Q(M,H)$ の構造群 H をより大きい群 G に拡大して, 主ファイバー束 $P(M,G)$ を作ることはいつも可能であるが, 逆に与えられた $P(M,G)$ の構造群 G をその部分リー群 H にまで縮小できるかどうかについては次の結果が知られている.

定理 2 $P(M,G)$ の構造群 G がそのリー部分群 H に縮小できるための必要かつ十分な条件は, M の局所直積を与える開被覆 $\{U_\alpha\}$ でそれに対応する座標変換 $\psi_{\beta\alpha}$ が G' の値をとるようなものが存在することである.

[証明] 十分であることだけを証明しておこう. $\psi_{\beta\alpha}$ が G' の値をとるような M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ があるとしよう. $\psi_{\beta\alpha}$ は $U_\alpha\cap U_\beta\to G$ の微分可能写像で値がリー部分群 G' に属することから $U_\alpha\cap U_\beta\to G'$ の写像としても微分可能であることがわかる. したがって, M 上の主ファイバー束 $Q(M,H)$ で $\{\psi_{\beta\alpha}\}$ を座標変換とするものが作れる. この Q から P への1対1写像 φ を次のようにして作る.

まず $\pi':Q\to M$ として写像の列

$$\pi'^{-1}(U_\alpha)\ \to\ U_\alpha\times G'\ \to\ U_\alpha\times G\ \to\ \pi^{-1}(U_\alpha)$$

の合成を $f_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha')\to\pi^{-1}(U_\alpha)$ とする. $\pi'^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$ の上では $f_\alpha=f_\beta$ となることは容易にわかるから $f:Q\to H$ が $\{f_\alpha\}$ から定義できる. $f(ua)=f(u)a$ ($u\in Q, a\in G$) は f_α の同じ性質から従う.

定理 3 $P(M,G)$ の構造群 G の閉リー部分群を H, G の作用する等質空間 $F=G/H$ をファイバーとするファイバー束を E とする. G が H まで縮小できるための必要かつ十分な条件は, $M\to E$ の切り口が存在することである. より正確にいえば, H を構造群とする部分束 $Q(M,H)$ の全体と $M\to E$ の切り口全体 $\mathrm{Sec}\,(E)$ との間に1対1の対応がある.

[証明] 部分束 $Q(M,H)$ が与えられているとき, $\sigma\in\mathrm{Sec}\,(E)$ を次のように定義しよう. G/H の原点 $\xi_0=\pi_0(e)$ (π_0 は $G\to G/H$ の射影) をとる. M の点 x に対し $\pi(u)=x$ となる点 $u\in Q$ をとり, E の点 $u\xi_0$ をとる. u の代わりに $v=uh$ ($h\in H$) をとると $v(\xi_0)=u(h\xi_0)=u\xi_0$. ここで $\sigma(x)=u(\xi_0)$ とおくと σ は $M\to E$ の切り口である. 逆に $\sigma:M\to E$ を切り口とするとき

$$Q=\{u\in P;\ u(\xi_0)=\sigma(\pi(u))\}$$

とおく. $h\in H$ ならば $u\in Q$ に対し $uh\in Q$ である. この P の部分集合が実際に多

様体で，構造群 H の M 上の主ファイバー束であり，P の部分束であることが確かめられる．

例として $P=L(M)$, $G=GL(n,R)$, $H=O(n)$ をとることにする．すでに $GL(n,R)/O(n)$ をファイバーとする $L(M)$ に同伴した束 E を考えた．上の定理によると，$L(M)$ の構造群 $GL(n,R)$ の $O(n)$ への縮小のしかた（すなわち部分束）と $M\to E$ の切り口すなわち M 上のリーマン計量とが1対1に対応する．実際，リーマン計量 g が与えられると，R^n の標準内積を $\langle\ ,\ \rangle$ で表したとき

$$Q=\{u\in L(M);\ \langle\xi,\eta\rangle=g_{\pi(u)}(u\xi,u\eta)\}$$

が $O(n)$ を構造群とする $L(M)$ の部分束になっている．上の式で u は接 n 枠 $(X_1,\cdots,X_n)$ に対応する $R^n\to T_{\pi(u)}(M)$ の線形同形写像であるが，それはすなわち $g_{\pi(u)}(X_i,X_j)=\delta_{ij}$ であることを意味する．いいかえれば上の Q は M の正規直交接 n 枠 $(X_1,\cdots,X_n)$ の全体の作る構造群 $O(n)$ の主ファイバー束である．これを $O(M)$ で記すことが多い．もちろん与えられたリーマン計量 g によって定まる．

逆に Q が $O(n)$ を構造群とする $L(M)$ の部分束のとき，対応するリーマン計量は次のようにして得られる．M の各点 x に対して $\pi(u)=x$ となる Q の点 u をとり

$$g_x(X,Y)=\langle u^{-1}X,u^{-1}Y\rangle,\qquad X,Y\in T_x(M)$$

とすると，これが u のとり方に無関係であることがわかるから，各点 x での $T_x(M)$ の内積がこのようにきまるが，計量 g の微分可能性は x の近傍から Q への切り口の存在を使えば容易にわかる．

さらに，他の例として $H=SL(n,R)$ をとる．M 上に一つの体積要素 ω（すなわちどの点でも0にならない n 次微分形式）が与えられたとき

$$Q=\{u=(X_1,\cdots,X_n)\in L(M);\omega(X_1,\cdots,X_n)=1\}$$

は $SL(n,R)$ を構造群とする部分束になる．逆に $SL(n,R)$ を構造群とする部分束 Q があれば，対応する体積要素が定まることになる．

他にも，多様体 M 上のいろいろの幾何的構造が $L(M)$ の構造群 $GL(n,R)$

の特別の部分群への縮小として定義できるのである.

問　方向づけられた多様体上で，リーマン計量は自然な体積要素をきめることを示せ.

2 接続の理論

この章では，まず主ファイバー束における接続の理論(接続形式，平行移動，ホロノミー群，曲率形式と構造方程式，接続の還元とホロノミー群のリー環の決定，局所平坦性，存在）を展開し，それから 同伴束 特にベクトル束における平行移動の話を導く．その特別な場合として，第3章での多様体の線形接続，第4章でのリーマン多様体のレビ・チビタ接続，部分多様体に対する法接続，第5章でのローレンツ多様体の接続などいろいろの応用が得られることになる．主ファイバー束とその接続は，理論物理学でのいわゆるゲージ理論（gauge theory）にとって不可欠の数学概念である．

§1．主ファイバー束の接続

底空間 M 構造群 G をもつ主ファイバー束 $P=P(M,G)$ を考える．Pの点 uにおける接空間を P_u, u を通るファイバー G_u に接する接ベクトルの作る部分空間を $\mathfrak{g}_u$ で表す．P の**接続**（connection）とは，P の各点uに P_u の部分空間 Q_u を定める対応で次の3条件をみたすものである：

1) $P_u=\mathfrak{g}_u+Q_u$ （直和）

2) 任意の $u\in P$ と $a\in G$ に対して $Q_{ua}=R_a(Q_u)$, ここで R_a は変換 $u\in P\rightarrow ua\in P$ である．

3) 対応 $u\rightarrow Q_u$ は微分可能である．

この最後の条件は次のことを意味する．P上の微分可能とは限らないベクトル場 X があるとき，各点 u において

$$X_u=Y_u+Z_u, \qquad Y_u\in\mathfrak{g}_u, Z_u\in Q_u$$

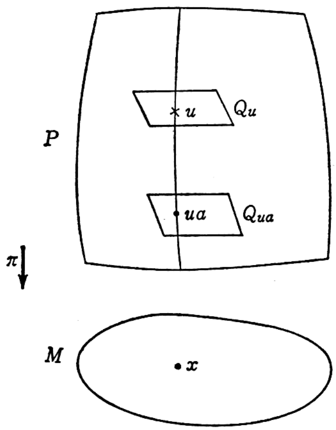
と一意的に分解することができ

垂直成分 Y: $u\rightarrow Y_u$

水平成分 Z: $u\rightarrow Z_u$

という二つのベクトル場が得られることになる．さて上の条件 3) は，与えら

れたベクトル場 X が微分可能ならば，その水平成分 Z も（したがって垂直成分 Y も）微分可能になるということである．



2-1 図

接続がこのように与えられているとき，Q_u のことを u における**水平部分空間** (horizontal subspace) とよぶ．ベクトル場 X の水平成分を hX, 垂直成分を vX と記すのが便利である．$X=hX$ のとき X を**水平ベクトル** (horizontal vector) とよぶ (2-1 図)．

接続が与えられているとき，G のリー環 $\mathfrak{g}$ の値をとる P 上の1次微分形式 ω を次のように定義しよう．第1章の §7 でみたように，各点 $u \in P$ での接部分空間 $\mathfrak{g}_u$ の任意の元は，$\mathfrak{g}$ の適当な元 A に対する基本ベクトル場 A^* の u における値 A^*_u という形にかくことができる．したがって，$\mathfrak{g}_u$ の上では

$$\omega(A^*_u) = A$$

ときめ，Q_u 上ではいつも $0 \in \mathfrak{g}$ というような1次微分形式 ω が定まるわけである． 接続の定義の条件 3) を用いることによって ω が微分可能であることが示される．この ω を接続の**接続形式** (connection form) とよぶ．

接続形式は次のような条件をみたしている：

1′) $\omega(A^*) = A, \quad A \in \mathfrak{g}$;

2′) 各 $a \in G$ に対して

$$R_a{}^*\omega = \mathrm{ad}\,(a^{-1})\omega$$

すなわちすべてのベクトル X に対して

$$(R_a{}^*\omega)(X) = \mathrm{ad}\,(a^{-1})(\omega(X))$$

が成り立つ．ここで $\mathrm{ad}\,(a^{-1})$ は G の $\mathfrak{g}$ における随伴表現を表す．

1′) は定義から自明．2′) を証明するために，X が水平である場合を考えると，接続の条件 (2) から $R_a(X)$ も水平である．したがって

$$\omega(X)=0 \qquad \text{また} \qquad (R_a{}^*\omega)(X)=\omega(R_aX)=0$$

次に，X が垂直であるときには $X=A^*{}_u$ と仮定してよい．$(R_aX)_{ua}$ は $\mathrm{ad}\,(a^{-1})A$ に対応する基本ベクトル場の ua における値に一致することが第1章§7の補題1によって知られているから

$$(R_a{}^*\omega)(X)=\omega(R_aX)=\mathrm{ad}\,(a^{-1})A=\mathrm{ad}\,(a^{-1})\omega(X)$$

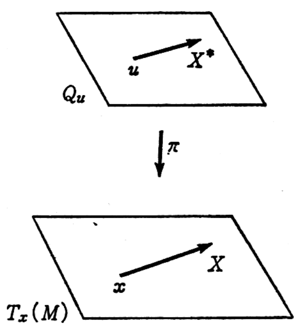
となる．このように 2′) は X が水平，垂直の場合に成り立つから一般のときにも成り立つことになる．

逆に 1′) と 2′) を満足する $\mathfrak{g}$ の値をもつ P 上の1次微分形式 ω が与えられたとき，P の各点 u で

$$Q_u=\{X\in P;\ \omega_u(X)=0\}$$

とおくことによって接続が定義でき，その接続形式は与えられた ω に一致することがわかる．

P から M への射影 π は各点 $u\in P$ において P_u から $T_x(M)$ $(x=\pi(u))$ の上への線形写像をひきおこすわけであるが，接続が P 上に与えられている場合には，π は Q_u を $T_x(M)$ の上へ同形にうつすことがすぐにわかる．この事実を用いると M 上のベクトル場 X が与えられているとき，P 上の水平ベクトル場 X^* で $\pi(X^*)=X$ となるものが一意的に存在することがわかる．X^* を X の **(水平) 持ち上げ** ((horizontal) lift) とよぶ (2-2 図).



2-2 図

問 ベクトル場 X が微分可能であるとき，X^* も微分可能であることを示せ．

(ヒント) 任意の $x\in M$ の近傍 U で $\pi^{-1}(U)$ が $U\times G$ に微分同相であるものを使って $\pi^{-1}(U)$ 上の微分可能なベクトル場 Y^* で $\pi(Y^*)=X$ となるものを作る．そのとき hY^* は微分可能で $\pi(hY^*)=X$ となる．一意性から $\pi^{-1}(U)$ 上では $X^*=hY^*$.

補題 1

(i) 持ち上げ X^* は各 $a\in G$ に対して変換 R_a により不変である．

（ii） 逆に，各 R_a によって不変な P 上の水平ベクトル場 X^* があれば，それは B 上のあるベクトル場の持ち上げになっている．

問 上の補題を証明せよ．

補題 2 X^*, Y^* がそれぞれ X, Y の持ち上げであるとき

（i） X^*+Y^* は $X+Y$ の持ち上げである．

（ii） $h[X^*, Y^*]$ は $[X, Y]$ の持ち上げである．

［**証明**］ (i) は自明．(ii) は

$$\pi h[X^*, Y^*]=\pi[X^*, Y^*]=[X, Y]$$

からしたがう．

注意 接続の定義において微分可能性の条件 (3) は分布 $x\to Q_x$ が微分可能であるということでいいかえられる．

§2. 平行移動

主ファイバー束 P に接続が与えられているとき，M の任意の曲線に沿う平行移動という概念を定義するのがこの節の目的である． 幾何学的には， この“平行移動”という考えを明確に公理化して，それから§1 でのべた接続という概念に到達することが望ましいともいえようが，ここではそれには触れないことにする．

今後“曲線”というときは，微分可能または区分的に微分可能な曲線を意味することにするが，後者は微分可能な曲線を有限個連続につないだものであり，以後必要な証明は微分可能な曲線に対してすれば十分であることに注意しておこう．

底 M の曲線 $\tau=\{x_t; 0\leqq t\leqq 1\}$ が与えられたとき P の曲線 $\tau^*=\{u_t; 0\leqq t\leqq 1\}$ で

1） τ^* は水平すなわち，各点での接ベクトルが水平．

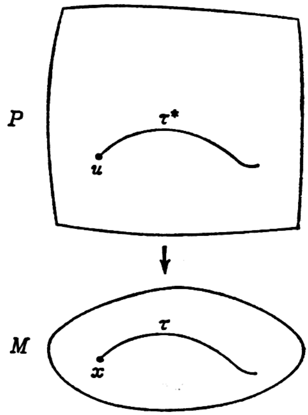
2） $\pi(u_t)=x_t$, $0\leqq t\leqq 1$

を満足するものを τ の（水平）**持ち上げ** (lift) とよぶ．

このような持ち上げが存在することを手っとり早く知ることができるのは，与えられた τ が M 上のあるベクトル場 X の積分曲線になっている場合であ

る．このときは X の持ち上げ X^* をとれば，その任意積分曲線 u_t が x_t の持ち上げになっていることがわかる．ただし，X^* の積分曲線の定義範囲が x_t の定義範囲と一致するかはすぐにはわからない．とにかく曲線の持ち上げとベクトル場の持ち上げが同様の概念であることは明らかであろう．

さて厳密に次の定理を述べよう．



2-3 図

定理 I　$\tau=\{x_t; 0\leqq t\leqq 1\}$ を M の曲線とする．$\pi(u_0)=x_0$ となるような P の点 u_0 をきめると，その点 u_0 から出発する τ の持ち上げ $\tau^*=\{u_t; 0\leqq t\leqq 1\}$ が一つかつただ一つ存在する（2-3 図）．

［**証明**］　P が局所的に直積であることから，P の曲線 $\{v_t; 0\leqq t\leqq 1\}$ で $v_0=u_0$ かつ $\pi(v_t)=x_t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ であるようなものをみつけることができる．τ の持ち上げを見出すために，G の曲線 $\{a_t; 0\leqq t\leqq 1\}, a_0=e$（単位元）で

$$u_t=v_t\cdot a_t$$

として得られる曲線 x_t が水平になるようにする方針ですすむことになる．この曲線の接ベクトルは

$$u_t'=v_t'\cdot a_t+v_t\cdot a_t'$$

ただし，v_t' は v_t の接ベクトル，a_t' は a_t の接ベクトルという形にかくことができるが，ここに現れる記号は多少説明が必要となる．$v_t'\cdot a_t$ というのは t の値を定めて $v\to v\cdot a_t$ という P の変換の微分による接ベクトル v_t'（点 y_t における）の像を意味する．一方 $v_t\cdot a_t'$ は $a\to v_t a$ という G から P への変換の微分による接ベクトル a_t'（点 a_t における G への接ベクトル）の像を意味する．したがって $v_t'a_t$ および $v_t a_t'$ は点 $u_t=v_t a_t$ における P の接ベクトルであり，その和が接ベクトル u_t' に等しいという訳である．このような記号の意味と，接続形式 ω の性質とから

$$\omega(v_t'\cdot a_t)=\mathrm{ad}\,(a_t^{-1})\cdot\omega(v_t')$$

であることは容易にわかる．一方，$v_t a_t'$ は $A=a_t^{-1}\cdot a_t'$ という $\mathfrak{g}$ の元に対応する基本ベクトル場 A^* の点 $v_t a_t$ における値と一致するから

$$\omega(v_t\cdot a_t')=a_t^{-1}\cdot a_t'$$

となる．したがって結局

$$\omega(u_t') = \mathrm{ad}\,(a_t^{-1})\cdot\omega(v_t') + a_t^{-1}\cdot a_t'$$

という式が得られることになる．曲線 u_t が水平であるための必要かつ十分な条件は G の曲線 a_t が

$$\omega(u_t') = \mathrm{ad}\,(a_t^{-1})\cdot\omega(v_t') + a_t^{-1}\cdot a_t' = 0$$

すなわち

$$a_t'\cdot a_t^{-1} = -\omega(v_t'), \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

という微分方程式を満足することである．このような微分方程式の解については以下で考えることにして，持ち上げの一意性を先に証明しておこう．いま u_t, v_t が共に $u_0 = v_0$ から出発する持ち上げであるとすれば上に得た式において $\omega(v_t') = 0$ であるから

$$a_t'\cdot a_t^{-1} = 0, \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

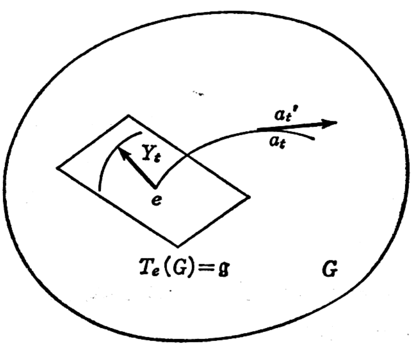
ということになる．これは各点の接ベクトル a_t' が 0 ということだから，曲線 a_t は1点 $a_0 = e$ に帰着してしまうことになり，したがって $u_t = v_t$ となる．

さて，リー群 G の上の微分方程式に関して次の一般的な定理をのべる．

定理 2　G をリー群，$\mathfrak{g}$ をそのリー環として $\mathfrak{g}$ を e における接空間と同一視する．$Y_t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ を $\mathfrak{g}$ の与えられた曲線とするとき，G の曲線 $a_t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ で微分方程式

(1)　$$a_t'\cdot a_t^{-1} = Y_t$$

を満足し，初期条件 $a_0 = e$ となるものが一意的に存在する．



2-4 図

この微分方程式の意味は明らかであろうが，念のために説明する．t をきめたとき a_t' は点 a_t における接ベクトルだから，これを a_t^{-1} による右移動でうつし e における接ベクトル $a_t'\cdot a_t^{-1}$ が得られ，それが与えられた Y_t に等しいということである (2-4 図)．特別の場合として，Y_t が1点 Y であるような場合

(2) $$a_t' \cdot a_t^{-1} = Y$$

という微分方程式の解（$a_0 = e$ として）は Y によって生成された1助変数部分群に他ならないことはよく知られている．第1章 §6 の方程式 (1) は上の (2) と同値である．

［証明］ $\mathfrak{g} = T_e(G)$ の一つの基 $X_1, \cdots, X_n$ をきめ，それに対応する e の近傍 U 内の標準座標系を $\{x^1, \cdots, x^n\}$ ($|x^i| < \delta$) としよう．X_i に対応する右不変ベクトル場 X_i は U 内で

$$(X_i)_a = R_a \cdot X_i = \sum_{k=1}^{n} u_i{}^k(a)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

という形にかくことができる．ただし $u_i{}^k(a)$ は U 上の微分可能な関数である．一方，与えられた曲線 Y_t を

$$Y_t = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(t) \cdot X_i$$

と表す．求める曲線 a_t の座標を $(x^1(t), \cdots, x^n(t))$ とすると与えられた方程式(1)は

(3) $$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} u_k{}^i(x^1(t), \cdots, x^n(t))\varphi^k(t), \qquad i = 1, \cdots, n$$

初期条件は

(4) $$x^i(0) = 0, \qquad i = 1, \cdots, n$$

となる．

微分方程式の存在定理により，ある $\varepsilon_0 > 0$ に対して $[0, \varepsilon_0]$ で定義された初期条件 (4) をもつ解の関数の組 $(x^1(t), \cdots, x^n(t))$ が一意的に存在する．さらに，定数 C に対して $|\varphi^i(t)| \leqq C$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ をみたしているような関数 $(\varphi^1(t), \cdots, \varphi^n(t))$ すべてに対して，上のような正数 ε_0 が共通にとれる．

我々の問題にもどろう．曲線 Y_t は区分的に微分可能だからある定数 $C > 0$ があって $|\varphi^i(t)| \leqq C$ がすべての t に対して成り立つ．まず初期条件(4)をみたす解 $(x^1(t), \cdots, x^n(t))$ $(0 \leqq t \leqq \varepsilon_0)$ をとれば $a_t = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$ $(0 \leqq t \leqq \varepsilon_0)$ で与えられる G の曲線は $a_t' a_t^{-1} = Y_t$, $a_0 = e$ を満足する．この曲線 a_t を $0 \leqq t \leqq 1$ に延長するために，次に

(5) $$\frac{dy^i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} u_k{}^i(y^1(t), \cdots, y^n(t))\varphi^k(t + \varepsilon_0), \qquad i = 1, \cdots, n$$

の初期条件

(6) $$y^i(0) = 0, \qquad i = 1, \cdots, n$$

に対する解 $(y^1(t), \cdots, y^n(t))$ を見出す．このとき，$|\varphi^k(t+\varepsilon_0)| \leqq C$ がすべての t に対して成り立っているから，上に引用した存在定理により $(y^1(t), \cdots, y^n(t))$ は $0 \leqq t \leqq \varepsilon_0$ に対して定義されているとしてよい．ゆえに曲線 $b_t = (y^1(t), \cdots, y^n(t))$ $(0 \leqq t \leqq \varepsilon_0)$ が得られて $b_0 = e$，$b_t' \cdot b_t^{-1} = Y_{t+\varepsilon_0}$ $(0 \leqq t \leqq \varepsilon_0)$ となる．そこで

$$a_{t+\varepsilon_0} = b_t \cdot a_{\varepsilon_0}, \qquad 0 \leqq t \leqq \varepsilon_0$$

とおくことによって曲線 a_t が $0 \leqq t \leqq 2\varepsilon_0$ まで定義できて

$$a_{t+\varepsilon_0}' \cdot a_{t+\varepsilon_0}^{-1} = b_t' \cdot a_{\varepsilon_0} \cdot (b_t \cdot a_{\varepsilon_0})^{-1} = b_t' \cdot b_t^{-1} = Y_{t+\varepsilon_0}$$

となる．すなわち定理でいうような曲線 a_t が $0 \leqq t \leqq 2\varepsilon_0$ の範囲で得られたことになる．このような過程をつづけて $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で曲線 a_t を作ることができる．

注意 リー群 G の上の微分方程式 $a_t' \cdot a_t^{-1} = Y_t$ の一番初等的な例は 3 次元ユークリッド空間 E^3 の曲線論にすでに現れる．すなわち曲線 $x(s)$ が弧長 s を助変数として与えられているとき，s の範囲を 0 から全弧長 l までとしておこう．まず

$$e_1(s) = \frac{dx}{ds}$$

は単位接ベクトルであるが，どの点でも

$$\frac{de_1}{ds} \neq 0$$

と仮定しておくと，この de_1/ds の長さ $k(s)$ を **曲率** (curvature) とよび，

$$e_2(s) = \frac{de_1}{ds} \Big/ k(s)$$

を単位主法ベクトルとよぶ．さらにベクトル積

$$e_3(s) = e_1(s) \times e_2(s)$$

を単位従法ベクトルとよぶ．このとき，よく知られたフレネー・セレー (Frenet-Serret) の公式

$$\frac{de_1}{ds} = ke_2$$

$$\frac{de_2}{ds} = -ke_1 + we_3$$

$$\frac{de_3}{ds} = -we_2$$

が成り立つ．ただしここで $k = k(s)$ はすでに定義した曲率，$w = w(s)$ は曲線の **捩率** (torsion) とよばれる関数である．$\{e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}$ をフレネー・セレーの直交枠とよぶが，各ベクトルを行ベクトルと考えて行列

$$a(s)=\begin{bmatrix}e_1(s)\\e_2(s)\\e_3(s)\end{bmatrix}$$

を作ると，$s\to a(s)$ は回転群 $SO(3)$ の曲線となる．フレネー・セレーの公式は，

$$\frac{da}{ds}=Y(s)a(s)\qquad すなわち\qquad \frac{da}{ds}a(s)^{-1}=Y(s)$$

ここで

$$Y(s)=\begin{bmatrix}0 & k(s) & 0\\ -k(s) & 0 & w(s)\\ 0 & -w(s) & 0\end{bmatrix}$$

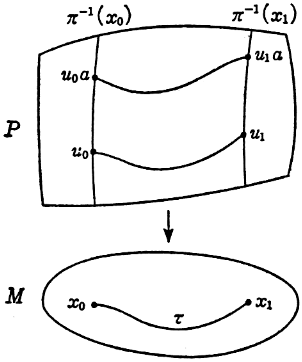
はその形からわかるように，歪対称だから $SO(3)$ のリー環 $\mathfrak{o}(3)$ の曲線と考えることができる．さて曲線の基本定理といわれているのは，区間 $[0,l]$ 上の任意の（微分可能な）関数 $k(s)>0$，$w(s)$ が与えられたとき，これらをそれぞれ曲率，捩率とするような弧長 s で表される曲線 $x(s)$ $(0\leqq s\leqq l)$ が E^3 の合同変換を除いて一意的に存在するという定理である．与えられた関数 k,w を用いて上のような $\mathfrak{o}(3)$ の曲線 $Y(s)$ を作り，微分方程式 $(da/ds)\cdot a(s)^{-1}=Y(s)$ の，たとえば $a(0)=$ 単位行列という解をとり，その第1行ベクトルを $e_1(s)$ とし $dx/ds=e_1(s)$ を解く．すなわち，$e_1(s)$ を任意の初期条件 $x(0)$ をきめて積分することによって得られるベクトル関数 $x(s)$ が求める曲線の一つであることは容易に確かめられる．ここで初期条件 $a(0)$ と $x(0)$ を選ぶ自由度が，定理にいわれる“E^3 の合同変換を除いて”ということに相当するわけである．詳しいことは 小林昭七：曲線と曲面の微分幾何（本選書 17，p. 22-29）を参照．

さて，いよいよ**平行移動** (parallel displacement) を定義しよう．M の曲線 $\tau=\{x_t;\ 0\leqq t\leqq 1\}$ と $\pi(u_0)=x_0$ となる P の点 u_0 が与えられているとき，u_0 を出発する τ の持ち上げ u_t $(0\leqq t\leqq 1)$ が一意的に定まるから，その終点 u_1 は x_1 上のファイバーの点である．すなわち x_0 上のファイバーの点 u_0 に対して x_1 上のファイバーの点 u_1 が一意的に定まる．この写像を曲線 τ と同じ記号 τ で表し，これを曲線 τ に沿う平行移動とよぶ．構造群 G の任意の元 a に対して

$$\tau(u_0a)=\tau(u_0)a$$

が成り立つ．なぜならば，u_t が u_0 を始点とする τ の持ち上げならば u_ta は

u_0a を始点とする τ の持ち上げで，したがってその終点 u_1a が $\tau(u_0a)$ に等しいからである．この事実から平行移動 τ は x_0 上のファイバーから x_1 上のファイバーの上への微分同相写像であることがわかる（2-5 図）．

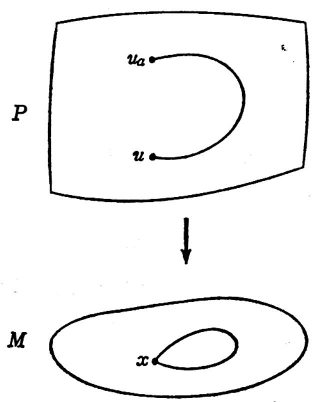


2-5 図

M の曲線の P への持ち上げの作り方をもう少し精密に検討してみると，次の事実が正しいことがわかる．M の 2 点 x_0 と x_1 とを結ぶ曲線の微分可能な族，すなわちホモトピー τ_s $(0 \leqq s \leqq 1)$ が与えられていると，x_0 上の P の点 u_0 に対して構造群 G の連続な曲線 a_s $(0 \leqq s \leqq 1)$ が存在して $\tau_s(u_0) = \tau_0(u_0)a_s$ が成り立つ．この事実を平行移動は曲線の微分可能なホモトピーに連続的に依存するというようにいい表すことにしよう．

§3. ホロノミー群

平行移動の概念を使って，接続のホロノミー群を定義しよう．M の点 x 上のファイバーを G_x で表す．x からでて x にもどる閉曲線の全体を C_x で表すと，C_x の元 τ に対してそれに沿う平行移動 τ は G_x の自己同形写像すなわち $\tau(ua) = \tau(u)a$ $(u \in G_x, a \in G)$ を満足する G_x の変換である．このようにして得られる G_x の変換全体 Φ_x が変換群を作ることは容易に確かめられる．これを x における**ホロノミー群** (holonomy group) とよぶ．



2-6 図

このホロノミー群 Φ_x を構造群 G の部分群と考える方法は次のようである．x 上の P の点 u をきめる．Φ_x の任意の元 τ に対して $\tau(u) = u \cdot a$ となる G の元 a が定まる．他の元 τ' に対して $\tau'(u) = u \cdot a'$ であるとすると

$$(\tau\tau')(u) = \tau(u\cdot a') = \tau(u)\cdot a' = (u\cdot a)\cdot a' = u\cdot(aa')$$

である．これは $\tau \in \Phi_x \to a \in G$ という写像が群 Φ_x から群 G の中への準同形写像であることを示す．実際にはこれが G の中への同形写像であることがすぐわかる．この像である G の部分群 Φ_u のことを u におけるホロノミー群とよぶ．この Φ_u は直接に，u と ua とを水平曲線で結ぶことができるような G の元 a 全体の作っている部分群というように定義できる（2-6 図）．

問 この定義により Φ_u が部分群であること，Φ_x と同形であることを証明せよ．

問 P の2点 u, v が水平な曲線で結べるとき $u\sim v$ とかくことにする．次の事柄を証明せよ．

（1） $u\sim v$ は同値関係である．

（2） $u\sim v$ ならば，任意の G の元 a に対して $ua\sim va$.

（3） $\pi(u)=\pi(v)$ ならば，ホロノミー群 Φ_u と Φ_v とは G の中で共役である．

（4） $u\sim v$ ならば，Φ_u と Φ_v とは同形である．

（5） すべての $\Phi_u\,(u\in P)$ は互いに同形である．

ホロノミー群 Φ_x または Φ_u の群としての構造はすべて同じである．したがって，たとえばホロノミー群が可換であるというのは u または x の選び方に無関係な P の接続のみに関係した性質である．

ホロノミー群の部分群で**制限ホロノミー群** (restricted holonomy group) とよばれるのは，M の閉曲線で 0 にホモトープなものに対応する平行移動全体から得られる．u または x をきめたときに得られる制限ホロノミー群を $\Phi_u{}^0$ または $\Phi_x{}^0$ で表す．

前節の終でのべたように，平行移動は曲線の微分可能なホモトピーに連続的に依存する．この事実を用いると，$\Phi_u{}^0$ は構造群 G の弧状連結な部分群であることがわかる．第1章§6の定理1により $\Phi_u{}^0$ は G の連結リー部分群になることが結論できる．底空間 M が可算基をもつときは $\Phi_u{}^0$ は Φ_u の単位元の弧状連結成分と一致することになる．これらの議論の詳細は省略することにしよう．

M が単連結のときは，制限ホロノミー群は当然，ホロノミー群自体と同じであり，ホロノミー群は連結リー群である．そのリー環はおおざっぱにいって

接続の局所的な性質を表す曲率形式からきまることが証明されることになる. まず曲率形式のことを次節でのべる.

§4. 曲率形式と構造方程式

主ファイバー束 P 上に与えられた接続 Γ の接続形式を ω とする.

一般に任意のベクトル空間 V の値をとる P 上の p 次の微分形式 α に対して, その**共変外微分** (covariant differential) $D\alpha$ を定義しよう. それには普通の外微分を d とかき, 任意のベクトル $X_1, \cdots, X_{p+1}$ に対して

$$(D\alpha)(X_1, \cdots, X_{p+1}) = (d\alpha)(hX_1, \cdots, hX_{p+1})$$

とおく. ここで h は §1 におけるように水平成分を表す. $D\alpha$ は V の値をとる P 上の $(p+1)$ 次の微分形式である.

さて, 接続形式 ω の共変外微分 $\Omega = D\omega$ を Γ の**曲率形式** (curvature form) とよぶ.

ω は構造群 G のリー環 $\mathfrak{g}$ の値をとる 1 次微分形式だが, Ω は $\mathfrak{g}$ の値をとる 2 次微分形式であり, さらに ω と同じく

$$R_a{}^*\Omega = \mathrm{ad}\,(a^{-1})\Omega$$

という性質をもっている.

問 この性質を導きだせ.

曲率形式の幾何学的意味は次のようにして与えられる. まず X, Y が P 上の水平ベクトル場であるとき, $[X, Y]$ は一般には水平とは限らない. P の点 u で, $[X, Y]$ の垂直成分 $v[X, Y]$ はどのようにして計算できるかを考えると, 第 1 章 §4 の公式

$$2d\omega(X, Y) = X\cdot\omega(Y) - Y\cdot\omega(X) - \omega([X, Y])$$

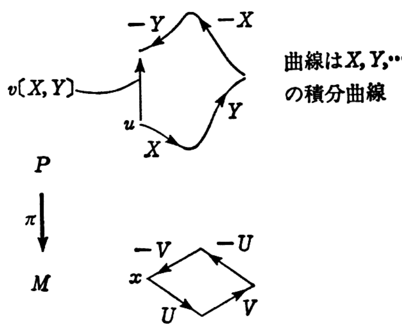
を使うと, いま $\omega(Y) = \omega(X) = 0$ だから

$$\omega([X, Y]) = -2\Omega(X, Y)$$

$v([X, Y])_u = A^*{}_u$ $(A \in \mathfrak{g})$ であるとすると, 上式から $A = -2\,\Omega_u(X, Y)$ ということになる. この事実の直観的な意味を考えよう.

点 u に対し M の点 $x = \pi(u)$ をとり, その近傍の座標系 $\{x^1, x^2, \cdots, x^n\}$

に対して $U=\partial/\partial x^1$, $V=\partial/\partial x^2$ というベクトル場を考える．x から出発して U の方向に単位の長さだけすすみ（正確にいえば $x_t=(t,0,\cdots,0)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ という曲線をとり）さらに V の方向に単位の長さだけすすむ（すなわち $y_t=(1,t,0,\cdots,0)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ をとる）．その後 $-U$ の方向に単位の長さ，最後に $-V$ の方向に単位の長さすすんで点 x にもどる．この“平行四辺形”を τ で表すとき，点 u から出発する τ の持ち上げはどのようになるのであろうか？ ベクトル場 U, V の持ち上げを X, Y とする．$\pi(h[X,Y])=[U,V]=0$ であるから（§1 の補題 2）$h[X,Y]=0$，すなわち $[X,Y]$ は垂直である．$[X,Y]$ はおおざっぱにいって，ベクトル場 X,Y を用いて点 u から出発して上にのべたような“平行四辺形”を作ろうとすると，$[X,Y]=0$ とは限らないから u にはもどらないが，上の事実からいって終点は u と同じファイバーにのっていると考えられる．u から終点への垂直な“距離”が $v[X,Y]=-2\Omega_u(X,Y)$ で与えられるということになる（2-7 図）．



2-7 図

以上のべたような幾何的意味を含んだ式が次の構造方程式（structure equation）とよばれるものである．

定 理（**構 造 方 程 式**） P 上の任意のベクトル場 X, Y に対して

$$d\omega(X,Y)=-\frac{1}{2}[\omega(X),\omega(Y)]+\Omega(X,Y)$$

ここで括弧 $[\ ,\ ]$ はもちろんリー環 $\mathfrak{g}$ の演算である．

［**証 明**］ 次の三つの場合に分けて方程式を確かめれば十分である．

（i） X, Y が共に水平のとき． このときは $\omega(X)=\omega(Y)=0$ だから方程式は Ω の定義そのものである．

（ii） X, Y が共に基本ベクトル場でそれぞれ A^*, B^* $(A, B\in\mathfrak{g})$ に一致するとき．このときは第1章 §4 の公式

$$2\,d\omega(X, Y) = X\cdot\omega(Y) - Y\cdot\omega(X) - \omega([X, Y])$$

を再び使うと，$\omega(B^*) = B$ だから $A\omega(B^*) = 0$. 同様に $B\omega(A^*) = 0$. $-\omega([A^*, B^*]) = -\omega([A, B]^*) = -[A, B]$. 一方 $\Omega(A^*, B^*) = 0$ だから方程式が成り立つ.

(iii) Xが水平，$Y = A^*$ ($A \in \mathfrak{g}$) のとき．　再び同じ公式を使うと

$$2\,d\omega(X, A^*) = X\cdot\omega(A^*) - A^*\cdot\omega(X) - \omega([X, A^*])$$

ここで $\omega(A^*) = A$ は一定だから $X\cdot\omega(A^*) = 0$. また $\omega(X) = 0$. 以下に示す補題により $[X, A^*]$ は水平だから $\omega([X, A^*]) = 0$. 結局 $d\omega(X, A^*) = 0$ となる方程式の右辺も $\omega(X) = 0$, $\Omega(X, A^*) = 0$ により 0に等しい.

補　題　A^* が基本ベクトル場，Xが水平ベクトル場であるとすると $[X, A^*]$ は水平である.

[**証明**]　A^* は $a_t = \exp tA$ による R_{a_t} を生成しているから，第1章 §3 の定理2により

$$[X, A^*] = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\right)[(R_{a_t})_*X - X]$$

ここで $R_{a_t}X$ は X と共に水平だから右辺は水平である．これで補題と共に構造方程式の証明が終る.

§5. 接続の写像

主ファイバー束 $Q = Q(N, H)$ と $P = P(M, G)$ が与えられているとする. 微分可能写像 $\tilde{f}: Q \to P$ が **準同形写像** (homomorphism) であるというのは，構造リー群 H から G の中への準同形写像 φ があり

$$\tilde{f}(ua) = \tilde{f}(u)\varphi(a), \qquad u \in Q,\ a \in H$$

が成り立つことである．このとき $\tilde{f}$ は底空間 N から M の中への微分可能写像 f をひきおこす.

さらに Q に接続 Γ_Q, P に接続 Γ_P が与えられているとしよう．準同形写像 $\tilde{f}$ が Γ_Q を Γ_P にうつすというのは，Q の各点 u での水平部分空間が $\tilde{f}(u)$ での水平部分空間の中へ $\tilde{f}$ の微分によりうつされることである．このとき，u_t が Q の水平曲線ならば $\tilde{f}(u_t)$ は P の水平曲線である.

特別な場合を二つ考える ($H = G$ のときと $N = M$ のとき).

まず $H = G$ とする．このとき次の結果がいえる.

定理 1 $P(M,G)$ を主ファイバー束，f を多様体 N から M の中への微分可能写像とする．このとき

$$Q=\{(u,x)\in P\times N;\ f(x)=\pi(u)\}$$

は N 上の構造群 G の主ファイバー束と考えられ，さらに $\tilde{f}(u,x)=u$ は Q から P への準同形写像（Gの恒等写像に対応する）である．さらに P が接続 Γ をもっているとき，その接続形式 ω のひきもどし $\tilde{f}^*\omega$ は Q の接続形式で，その接続は $\tilde{f}$ によって Γ にうつされる．

この定理の Q を $f^{-1}(P)$ と記し，P から f によって**ひきおこされた主ファイバー束** (induced principal bundle) とよぶ．

［**証明**］ G の Q 上の作用を

$$(u,x)a=(ua,x), \qquad a\in G,\ (u,x)\in Q$$

によって定義すれば，Q は主ファイバー束になることが容易にわかる．他の主張も容易に確かめられる．

簡単な例として，N が M の開部分多様体（f は包含写像）のとき，$f^{-1}(P)$ は $\pi^{-1}(P)$ に他ならない．

次に $N=M$ のときは準同形写像 $\tilde{f}:Q(M,H)\to P(M,G)$ はつねに微分同相写像 $f:M\to M$ をひきおこすものと仮定する．

定理 2 $\tilde{f}$ が $Q(M,H)$ から $P(M,G)$ への準同形写像のとき，Q の任意の接続 Γ' に対して，P の接続 Γ で $\tilde{f}$ が Γ' を Γ にうつすようなものが一意的に存在する．

［**証明**］ $\tilde{f}(Q)$ の点 u' に対して $u'=f(u)$ となる Q の点 u をとり，u における Γ' の水平部分空間の $\tilde{f}$ による像を，u' における水平部分空間と定義したいわけであるが，この像が u のとり方に無関係なことを確かめる必要がある．これは容易にできる．

次に P の任意の点 u' に対して $u'=f(u)a$，ここで $u\in Q$, $a\in G$ とかいて，$f(u)$ における水平部分空間（これはすでに定義されている）の R_a による像を u' における水平部分空間と定義したい．このやり方が u' の上のような表し方に無関係であることが確かめられる．このようにして各点で水平部分空間になるべきものを定義して，実際接続の条件がみたされて P の接続 Γ が得られることになる．$\tilde{f}$ が Γ' を Γ にうつすこと，このような接続 Γ は一意的であることはほとんど明らかである．

問 上の証明の細部を確かめよ.

さらに特殊な場合として，主ファイバー束 $P(M, G)$ の構造群 G がそのリー部分群 H に縮小でき，部分束 $Q(M, H)$ が存在するとしよう．P の接続 Γ があり，それに対して Q の接続 Γ' があって，包含写像 $Q \to P$ が Γ' を Γ にうつしているとき，Γ は Γ' に **還元できる** (reducible) という．この事情は次の §6 で論じる.

最後に，主ファイバー束 $P=P(M, G)$ のそれ自身への微分同相写像 $\tilde{f}$ で

$$\tilde{f}(ua)=\tilde{f}(u)a, \qquad u \in P,\ a \in G$$

を満足するものを P の **自己同形写像** (automorphism) とよぶ．このとき $\tilde{f}$ は底空間 M の微分同相写像 f をひきおこす.

ここでさらに P の接続 Γ が $\tilde{f}$ によってそれ自身にうつされるとき，$\tilde{f}$ は接続 Γ を **保存する** といい，また接続 Γ は $\tilde{f}$ により **不変** (invariant) であるという.

一つの例として，G をリー群，H がその閉リー部分群であるとして，G を $M=G/H$ 上の構造群 H の主ファイバー束と考えよう (第1章 §7)．いま G の各元 a による G の左移動 $L_a : x \to ax$ を考えると，これは H の右側の作用と交換可能で，すなわち

$$L_a(xh)=(L_a x)h, \qquad h \in H$$

が成り立つ．したがって L_a は主ファイバー束 $G=G(M, H)$ の自己同形写像である.

また，f が多様体 M の微分同相写像とする．f は自然に M の接 n 枠束 $L(M)$ の自己同形写像 $\tilde{f}$ をひきおこす.

主ファイバー束 $P=P(M, G)$ とその接続の概念は，理論物理におけるいわゆるゲージ論 (gauge theory) において不可欠である．その際，M は主として4次元リーマンまたはローレンツ多様体，G は $SO(2)$, $SU(2)$ 等であるが，P の自己同形写像で底空間 M の恒等写像をひきおこすようなものがゲージ変換 (gauge transformation) とよばれている．ここでは次の論文を引用するにとどめる.

T. T. Wu, C. N. Yang : Concept of nonintegrable phase factors and global

formulation of gauge fields, Physical Review D, vol. 12, No. 12 (1975), 3845–3857.

§6. 接続の還元定理

この節では次の結果を証明しよう．

定理 $P(M, G)$ を可算基をもつ主ファイバー束とし，与えられた接続 Γ のホロノミー群を Φ とする．このとき，P の構造群 G は部分群 Φ に縮小でき，接続 Γ は，それに対応する部分束 P' の接続に還元できる．

［証明］ M, G も P と同様に可算基をもつ．したがって §3 でのべたように，P の任意にきめた点 u_0 を基準点とするホロノミー群 Φ の単位元の弧状連結成分 Φ^0 は，Φ/Φ^0 が可算であるようなリー群になっている．$x_0 = \pi(u_0)$ とおく．

G が Φ に縮小できることを示すために，M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と Φ の値をとる変換関数 $\psi_{\beta\alpha}$ の族を構成しよう．そのために，点 x_α を原点とする座標近傍 U_α $(|x^i| < \delta)$ による M の被覆をとろう．各 α に対して，x_0 から x_α への曲線 τ_α を選んでおく．この曲線に沿う平行移動により u_0 から得られる P の点を u_α とする．

各 α に対して，$\pi^{-1}(U_\alpha)$ から $U_\alpha \times G$ への同相写像を次のように定義する．$\pi^{-1}(U_\alpha)$ の各点 u に対して x_α から $x = \pi(u)$ への U_α の局所座標に関する線分を ρ_α とする．その逆 ρ_α^{-1} に沿う平行移動によって得られる点 $\rho_\alpha^{-1}(u)$ を $u_\alpha \cdot a$ という形にかき，この G の元 a を $\phi_\alpha(u)$ と定義する．そうすると $u \to (\pi(u), \phi_\alpha(u))$ は $\pi^{-1}(U_\alpha)$ から $U_\alpha \times G$ の上への同相を与えることが容易にわかる．

これに対応する変換関数 $\psi_{\beta\alpha}(x)$ $(x \in U_\alpha \cap U_\beta)$ は Φ の中に値をとる．なぜならば，もし $u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ のとき，$\phi_\alpha(u) = a$，$\phi_\beta(u) = b$ としよう．すなわち，水平曲線で結べるという関係を $\sim$ で表したとき，$u \sim u_\alpha a \sim u_\beta b$．さらに $u_0 \sim u_\alpha \sim u_\beta$ という関係から容易に $u_0 \sim u_0 \cdot ba^{-1}$ すなわち ba^{-1} はホロノミー群 Φ に属する．したがって $\psi_{\beta\alpha}(x) = \phi_\beta(u)\phi_\alpha(u)^{-1}$ は Φ に属する．

このようにして G は Φ に還元できる．すなわち第1章 §7 におけるようにファイバー束 $P'(M, \Phi)$ を抽象的に作ることができるが，現在の場合には，$P'(M, \Phi)$ は $P(M, G)$ の部分束として次のように実現できる．(x, a) $(x \in U_\alpha, a \in \Phi)$ の同値類として表される $P'(M, \Phi)$ の点を $u = P_\alpha \cdot (u_\alpha, a)$ にう

つす写像を f とする．この f は明らかに P' を P の中へ1対1にうつす．P の部分束 $f(P')$ は u_0 と水平曲線によって結ばれる P の点全体と一致することが次のようにしてわかる．

Φ の元 a に対して，$u_0 \sim u_0 a$．また $u_\alpha \sim u_0$ だから $u \sim u_\alpha a \sim u_0 a \sim u_0$ となり $f(P')$ の各点が u_0 に水平曲線で結べることがわかる．逆に u_0 と水平曲線で結べる点は $f(P')$ に属することがわかる．

この事実を用いて P の接続 Γ が P' のある接続 Γ' に還元できることを証明しよう．$f(P')$ を P' と同一視して，いまその点 u をとると Γ の水平部分空間 Q_u は P' への接空間内に横たわる．なぜならば u における任意の水平ベクトルは u から出る水平曲線の接ベクトルであり，その水平曲線は P' に入っているからである．このことをいっておけば，$u \in P' \to Q_u \subset P'$ が P' の接続 Γ' を定めること，また f が Γ' を Γ にうつすことを全く簡単に確かめることができる．これで Γ が Γ' に還元できることがわかった．

注意　Γ' の u_0 に関するホロノミー群は Φ と一致することが容易に確かめられる．この定理は次節でのホロノミー定理の証明に役立つ．上の証明で構成した u_0 と水平曲線で結べるような点全体の作る部分束 P' を u_0 に関する**ホロノミー束** (holonomy bundle) とよぶ．

§7. ホロノミー定理

$P(M, G)$ の接続 Γ の基本点 u_0 に関するホロノミー群を Φ としよう．制限ホロノミー群 Φ^0 は Φ の単位元の弧状連結成分と一致するリー群である．そのリー環—**ホロノミー環**—が曲率形式からどのように定まるかを次の定理が示している．

定理　ホロノミー環 $\mathfrak{k}$ は次のような元全体から生成される $\mathfrak{g}$ の部分リー環と一致する：　$\Omega_u(X^*, Y^*)$，ここで u は u_0 と水平曲線で結べる P の任意の点をうごき，X^*, Y^* は u における任意の水平ベクトルである．

[証明]　最初に P の各点が u_0 に水平曲線によって結ばれる場合を考える．このときホロノミー群は G と等しい．M 上のベクトル場 X, Y の水平持ち上げを X^*, Y^* とする．P のすべての点とすべての X，Y に対してきまる $A = \omega_u([X^*, Y^*]) = -2\Omega_u(X^*, Y^*)$ の全体の生成するリー部分環を $\mathfrak{g}'$ とする．$\mathfrak{g}'$ がいまの場合，ホロノ

ミー環である $\mathfrak{g}$ と一致することを証明しよう．

P の各点 u において，水平部分空間 Q_u と部分空間 $\mathfrak{g}_u' = \{A^*_u; A \in \mathfrak{g}'\}$ とで張られる P_u の部分空間を $\varDelta$ とする．ここで A^* は A に対応する基本ベクトル場を表す．B の次元が n，$\mathfrak{g}$ の次元が r，$\mathfrak{g}'$ の次元が s であるとすると，$\varDelta$ は $(n+s)$ 次元の接部分空間である．$u \to \varDelta_u$ が微分可能で完全積分可能であることを証明しよう．それができれば u_0 を通る極大積分多様体を $P(u_0)$ としよう．P の各点は仮定により u_0 を通る水平曲線の上にあり，水平曲線は $P(u_0)$ に含まれている．したがって $P(u_0) = P$，$\dim P(u_0) = n+s = \dim P = n+r$，$r = s$ ゆえに $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ となる．

$\varDelta$ が微分可能であることを証明するために，$\mathfrak{g}'$ の基 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ をとり対応する基本ベクトル場 $A_1^*, A_2^*, \cdots, A_s^*$ をとる．一方 M の点xの座標近傍 U で $\pi^{-1}(U) = U \times G$ となるようなものをとり，その座標系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ に関してベクトル場 $\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^n$ をとる．それらの水平持ち上げ $X_1^*, \cdots, X_n^*$ は $\pi^{-1}(U)$ の各点 u での水平部分空間 Q_u を張る．他方 $A_1^*, \cdots, A_s^*$ は $\{A^*_u; A \in \mathfrak{g}'\}$ を張る．こうして分布 $\varDelta$ は局所基 $A_i^*\ (1 \leqq i \leqq s)$，$X_j^*\ (1 \leqq j \leqq n)$ をもつ．

$\varDelta$ が完全積分可能であることを示すためには $[A_i^*, A_j^*]$，$[A_i^*, X_j^*]$, $[X_i^*, X_j^*]$ が $\varDelta$ に属することをいえば十分である．$[A_i^*, A_j^*] = [A_i, A_j]^*$ かつ $\mathfrak{g}'$ がリー部分環であるから $[A_i, A_j] \in \mathfrak{g}'$，したがって $[A_i^*, A_j^*]$ は $\varDelta$ に属する．$[A_i^*, X_j^*]$ は§4の補題により水平したがって $\varDelta$ に属する．最後に $[X_i^*, X_j^*]$ の u における垂直成分は，$A = \omega_u([X_i^*, X_j^*]) = -2\Omega_u(X_i^*, X_j^*) \in \mathfrak{g}'$ として A^*_u で与えられる．したがって $[X_i^*, X_j^*]$ の垂直成分は $\varDelta$ に属し $[X_i^*, X_j^*]$ 自身も $\varDelta$ に属する．

さて一般の場合をとり扱うために $P'(M, \varPhi)$ を前節で構成したホロノミー束 $\varGamma'$ をその接続としよう．定理が P' における $\varGamma'$ に対して成立することはすでに証明されている．P に対して証明するためには，$\varGamma$ のホロノミー群（したがってホロノミー環）は $\varGamma'$ のホロノミー群（ホロノミー環）と一致することは既知の通りであるが，定理における $\Omega_u(X^*, Y^*)$ の全体は $\varGamma'$ の曲率形式を Ω' としたときに $\Omega_u'(X^*, Y^*)$ の全体と同じことであることに注意すればよい．

注意 定理におけるすべての $\Omega(X^*, Y^*)$ の全体から張られる部分空間を $\mathfrak{m}$ とすると，実際は $\mathfrak{m}$ はホロノミー環 $\mathfrak{k}$ と一致する．なぜならば $R_a^*\Omega = \mathrm{ad}\,(a^{-1})\Omega$ という性質から，$\mathfrak{m}$ が $\mathrm{ad}\,(\varPhi)$ により不変であることがわかる．したがって $[\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$，当然 $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ すなわち $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}$ となる．

§8. 局所平坦性と接続の存在

$P=M\times G$ を直積主ファイバー束とすると $u=(x,a)$ $(x\in M)$ という形の元全体を Q_a としたとき，P は Q_a $(a\in G)$ の和になっている．各点 $u=(x,a)$ において Q_a への接空間を水平部分空間ととることによってきまる接続を**平坦** (flat) な接続とよぶ．その曲率形式は明らかに 0 である．

一般の主ファイバー束 $P(M,G)$ の接続が**局所平坦** (locally flat) というのは M の各点 x に近傍 U があり $\pi^{-1}(U)=U\times G$ にひきおこされる接続が平坦であることである．

定理　$P(M,G)$ の接続が局所平坦であるための必要かつ十分な条件は曲率形式が 0 であることである．

［証明］　必要であることは明らか．十分であることを証明するために曲率形式が 0 であるとしよう．M の各点 x に対して単連結な近傍 U をとり $\pi^{-1}(U)$ にひきおこされた接続を考える．§7 の定理により $\pi^{-1}(U)$ のホロノミー群は単位元だけから成り，接続の還元定理から $\pi^{-1}(U)$ の接続が平坦であることがわかる．

注意　$\Omega=0$ であるとき，$\pi^{-1}(U)$ 上の水平分布 $u\to Q_u$ が完全積分可能であることが §4 でのべた Ω の幾何的意味からわかるが，上の定理はこのことからも証明できる．

系　$P(M,G)$ が局所平坦な接続をもち，M が単連結ならば P は直積 $M\times G$ である．

主ファイバー束 $P(M,G)$ で M が第2可算公理をみたすとき，P が接続をもつことを証明しよう．M の各点 u に対してその近傍 U で $\pi^{-1}(U)=U\times G$ となるようなものをとると，$\pi^{-1}(U)$ に平坦な接続が存在することは自明である．その接続形式を ω_U としよう．M はこのような近傍 U の集まりで被覆されるから，その細分である局所有限な開被覆 $\{U_i\}$ とそれに属する 1 の分割 $\{\varphi_i\}$ をとる．$\pi^{-1}(U_i)$ 上の接続形式を ω_i とし

$$\omega_u=\sum_i \varphi_i(\pi(x))(\omega_i)_u$$

を考えると，これは P 上の G のリー環 $\mathfrak{g}$ の値をとる1次微分形式を定義する．$\mathfrak{g}$ の元 A に対応する基本ベクトル場 A^* に対して $\pi(u)\in U_i$ である限り，$\omega_i(A^*_u)=A$ であるから $\omega_u(A^*_u)=A$ となる．G の任意の元 a に対して

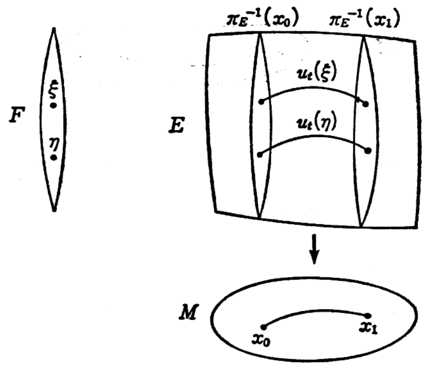
$R_a{}^*\omega_i = \mathrm{ad}(a^{-1})\omega_i$, $\varphi_i(\pi(ua)) = \varphi_i(\pi(u))$ から $R_a{}^*\omega = \mathrm{ad}(a^{-1})\omega$ が確かめられる．したがって ω は P 上の接続形式であり P の接続を定める．

§9. 同伴ファイバー束での平行移動

$P(M, G)$ を接続をもつ主ファイバー束，E をファイバー F の P に同伴したファイバー束とすると，次のようにして E の中での平行移動が定義できる．

M の曲線 $\tau = \{x_t; 0 \leqq t \leqq 1\}$ が与えられたとき，τ に沿う**平行移動**は x_0 上のファイバー $\pi_E{}^{-1}(x_0)$ から x_1 上のファイバー $\pi_E{}^{-1}(x_1)$ の上への1対1の写像で次のように定義される．τ の P における水平持ち上げを $\{u_t; 0 \leqq t \leqq 1\}$ として，各 u_t をFから $\pi_E{}^{-1}(x_t)$ への写像と考えて，$\pi_E{}^{-1}(x_0)$ から $\pi_E{}^{-1}(x_1)$ への写像 $u_1 \cdot u_0{}^{-1}$ を考える．

$\{x_t\}$ の他の水平持ち上げはあるGの元 a によって $\{u_t a\}$ という形になるから，上の写像 $(u_1 a)\cdot(u_0 a)^{-1}$ は $u_1 \cdot u_0{}^{-1}$ に等しい，すなわち $\pi_E{}^{-1}(x_0) \to \pi_E{}^{-1}(x_1)$ が M の曲線 τ によって一意的にきまる．これを τ に沿う平行移動とよぶ (2-8図)．



2-8 図

特に，Eがベクトル束であるときを考えよう．すなわち，P の構造群Gから $F = R^m$ 上の一般線形群 $GL(m, R)$ への表現ρがあり，E は R^m をファイバーとし P に同伴したファイバー束である．このとき P の接続によって定まる E の平行移動はファイバー間の線形写像となる．

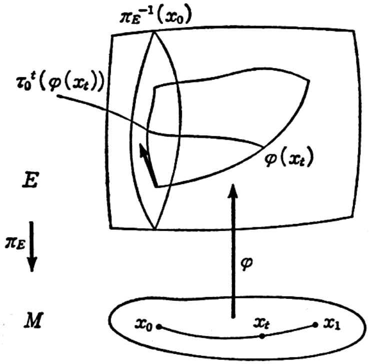
E の切り口全体 Sec (E) は自然にベクトル空間を作る．すなわち $\varphi, \psi \in$ Sec (E) に対して

$$(\varphi + \psi)(u) = \varphi(u) + \psi(u)$$
$$(\lambda\varphi)(u) = \lambda\varphi(u), \qquad \lambda \in R$$

である．Sec (E) の元φが与えられたとき，M の曲線 $\{x_t; 0 \leqq t \leqq 1\}$ に沿

う共変微分が次のようにして定義できる．たとえば x_t から x_0 への逆向きの曲線に沿う平行移動を $\tau_0{}^t$ で表すと，ベクトル空間 $\pi_E{}^{-1}(x_0)$ の中で

$$(1)\qquad \lim_{t\to 0}\frac{\tau_0{}^t(\varphi(x_t))-\varphi(x_0)}{t}$$



2-9 図

が存在することがわかり，この $\pi_E{}^{-1}(x_0)$ の元を $t=0$ における φ の共変微分とよぶ（2-9 図）．

さて $\varphi\in \mathrm{Sec}\,(E)$, $X\in\mathfrak{X}(M)$ であるとき φ の X による**共変微分**（covariant derivative）$\nabla_X\varphi\in \mathrm{Sec}\,(E)$ が次のように定義できる．

M の任意の点 x_0 に対し，X の x_0 を始点とする積分曲線を $x_t(0\leqq t\leqq \delta)$ とする．この曲線に沿う φ の $t=0$ における共変微分を $(\nabla_X\varphi)_{x_0}$ と定義する．これによって M の各点 x_0 に対し，$(\nabla_X\varphi)_{x_0}\in\pi_E{}^{-1}(x_0)$ を対応させる切り口 $\nabla_X\varphi\in \mathrm{Sec}\,(E)$ が定まることになる．

以上のべた $\nabla_X\varphi$ の幾何的な意味は明らかであるが，まず (1) の存在，さらに $\nabla_X\varphi$ の微分可能性を証明するのには次のようにすればよい．初めに

補 題　E の切り口 $\varphi\in \mathrm{Sec}\,(E)$ と $P\to F$ の微分可能な写像 f で $f(ua)=a^{-1}f(u)$ $(a\in G,\ u\in P)$ を満足するものとが 1 対 1 に対応する．

［**証 明**］ $\varphi\in \mathrm{Sec}\,(E)$ に対して

$$f(u)=u^{-1}\varphi(\pi(u)),\qquad u\in P$$

逆に f に対して，$\pi(u)=x$ のとき

$$(2)\qquad \varphi(x)=uf(u)$$

とおけばよい．

いま M の曲線 x_t に対し P への水平持ち上げを u_t とすると，$\varphi\in \mathrm{Sec}\,(E)$ とそれに応じる $f:P\to F$ に対して

$$\tau_0{}^t(\varphi(x_t)) = u_0{}^{-1}u_t f(x_t), \qquad \varphi(x_0) = u_0{}^{-1}f(u_0)$$

であるから（1）の存在は

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}(f(u_t))$$

の存在からわかる．また $X \in \mathfrak{X}(M)$ の水平持ち上げを $X^* \in \mathfrak{X}(P)$ とすると，（2）と同様に

（3） $$\nabla_X \varphi = u \cdot (X^* f)_u, \qquad \pi(u) = x$$

となるから $\nabla_X \varphi$ の微分可能性が確かめられる．

さてこの共変微分の演算

$$(X, \varphi) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathrm{Sec}\,(E) \to \nabla_X \varphi \in \mathrm{Sec}\, E$$

は $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ $(\varphi, \psi \in \mathrm{Sec}\,(E))$．$M$ 上の微分可能関数 λ に対して

（4） $$\nabla_{X+Y}\varphi = \nabla_X \varphi + \nabla_Y \varphi$$

（5） $$\nabla_{\lambda X}\varphi = \lambda \nabla_X \varphi$$

（6） $$\nabla_X(\varphi + \psi) = \nabla_X \varphi + \nabla_X \psi$$

（7） $$\nabla_X(\lambda\varphi) = (X\lambda)\varphi + \lambda \nabla_X \varphi$$

という 4 条件を満足する．実際 M 上のベクトル束 E に対してこの 4 条件を満足する写像 $\mathfrak{X}(M) \times \mathrm{Sec}\,(E) \to \mathrm{Sec}\,(E)$ がある場合，E が接続をもつといってもよい．ここでは詳しくのべないが，このような写像は，実際 E の平行移動（P の適当な接続から得られる）による共変微分の演算になっていることがわかるのである．

第 3 章で扱う（古典的）線形接続，第 4 章 § 10 に現れる部分多様体の法接続は，ここでのべたベクトル束の接続の重要な例である．

3 線形接続

この章では，多様体の線形接続（アファイン接続とよばれることもある）に関する基本的な事柄をとり扱う．§1, 2 では，主ファイバー束 $L(M)$ の立場から，§3,4 では共変微分演算 $\nabla_Y X$ とクリストッフェル記号 $\Gamma_i{}^k{}_j$ による方法により線形接続を論じる．捩率，曲率テンソルおよびそれらに関するビアンキの恒等式ののち，写像に沿う共変微分演算，測地線，指数写像を扱う．最後に測地線完備より強い性質である全完備性（エーレスマンの意味での完備性）を論じる．それは，エリー・カルタンによる曲線の展開という概念に基づいている．

§1. 線形接続

n 次元多様体 M の接 n 枠束 $P=L(M)$ を考える．その構造群は $GL(n, R)$ である．P の各点 u は n 次元ベクトル空間 R^n から M の点 $x=\pi(u)$ における接空間 $T_x(M)$ の上への線形同形写像をきめることを思いだそう（第1章 §7）.

P 上の R^n の値をもつ1次微分形式 θ を次のように定義する．$u\in P, X\in T_u(P)$ に対して

$$\theta(X)=u^{-1}\cdot\pi_*(X)$$

ここで $\pi_*(X)\in T_x(M)$ $(x=\pi(u))$ で $u^{-1}: T_x(M)\to R^n$ だから $\theta(X)$ は R^n の元である．

G の各元 a に対して次式が成り立つ．

$$(R_a{}^*\theta)(X)=a^{-1}\cdot\theta(X)$$

問 $(ua)^{-1}=a^{-1}u^{-1}$ を用いて上の式を証明せよ．

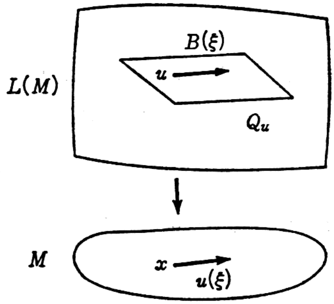
さて M の線形接続 (linear connection) とは，主ファイバー束 $P=L(M)$ の接続のことである．

P に接続が与えられたとき，R^n の各ベクトル ξ に対応する**基底ベクト**

ル場 (basic vector field) $B(\xi)$ を次のように定義しよう．P の各点 u に対して $(B(\xi))_u$ は $u\cdot\xi\in T_x(M)$ $(x=\pi(u))$ の u における水平持ち上げであるとする．すなわち

$$(B(\xi))_u\in Q_u,\qquad \pi(B(\xi))_u=u\cdot\xi$$

このようにして水平ベクトル場 $B(\xi)$ がきまる (3-1 図).



3-1 図

問 (i) $\theta(B(\xi))=\xi$ が成り立つことを証明せよ．

(ii) $GL(n,R)$ の各元 a に対して

$$B(a^{-1}\xi)=(R_a)_*\cdot B(\xi)$$

が成り立つことを証明せよ．

(iii) $\xi\neq 0$ ならば $B(\xi)$ は零点をもたないことを証明せよ．

さて R^n の標準基 $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ を固定し，対応する基底ベクトル場を $B_i=B(\xi_i)$ $(1\leqq i\leqq n)$ としよう．一方構造群 $GL(n,R)$ のリー環 $\mathfrak{gl}(n,R)$ の基を A_{ij} $(1\leqq i,\ j\leqq n)$ とし，対応する基本ベクトル場を $A_{ij}{}^*$ とする．P 上の n^2+n 個の $A_{ij}{}^*$, B_i は各点で1次独立であることが証明できる．そのために点 x で

$$\sum c_{ij}A_{ij}{}^*+\sum c_iB_i=0$$

となる定数 c_{ij} と c_i があるとしよう．$\sum c_{ij}A_{ij}{}^*$ は垂直，$\sum c_iB_i$ は水平だからそれぞれが0でなければならない．$\sum c_{ij}A_{ij}{}^*$ は $\sum c_{ij}A_{ij}\in\mathfrak{gl}(n,R)$ に対応する基本ベクトル場でそれが x で0になるのは $\sum c_{ij}A_{ij}$ が 0, したがってすべての $c_{ij}=0$. 同様に $\sum_{i=1}^n c_iB_i=B(\sum_{i=1}^n c_i\xi_i)$ が x で0になるのは上の問 (iii) によりすべての $c_i=0$ のときに限る．

一般に n 次元多様体 M の**完全平行性** (complete parallelisability) とは各点で1次独立な M 上の n 個のベクトル場の組のことである．したがって上にのべたことから

定理 1 接 n 枠束 $L(M)$ の接続は $L(M)$ の完全平行性を与える．

次に

定理 2　$A \in \mathfrak{gl}(n, R)$, $\xi \in R^n$ に対して $[A^*, B(\xi)]$ は $A\xi \in R^n$ に対応する基底ベクトル場である．すなわち

$$[A^*, B(\xi)] = B(A\xi)$$

[証明]　1助変数部分群 $a_t = \exp tA$ により

$$A\xi = \lim_{t \to 0} \frac{(a_t\xi - \xi)}{t}$$

一方，第1章 §3 の定理2により

$$[A^*, B(\xi)] = \lim_{t \to 0} \{B(\xi) - R_{a_t}B(\xi)\}/t$$

$$= \lim_{t \to 0} \{B(\xi) - B(a_t^{-1}\xi)\}/t$$

ここで $\xi \in R^n \to (B(\xi))_u \in Q_u$ は線形写像だから上式は

$$= B\left(\lim_{t \to 0} \frac{\xi - a_t^{-1}\xi}{t}\right) = B(A\xi)$$

この定理2は次の §2 で使われる．

§2. 捩率形式と構造方程式

P の接続が与えられたとき，その曲率形式 $\Omega = D\omega$ は第2章 §4 のように定義されるが，さらに $\Theta = D\theta$ とおきこれを**捩率形式** (torsion form) とよぶ．この Θ は R^n の値をとる P 上の2次微分形式で，$R_a{}^*\Theta = a^{-1}\Theta$ がすべての $a \in GL(n, R)$ に対して成り立つことがすぐわかる．

曲率形式 Ω に関しては，すでに構造方程式

$$d\omega(X, Y) = -\frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X, Y)$$

が成り立つことを知っているが，捩率形式については

定理　(**捩率に関する構造方程式**)

$$d\theta(X, Y) = \frac{1}{2}\{\omega(Y)\cdot\theta(X) - \omega(X)\cdot\theta(Y)\} + \Theta(X, Y)$$

が P 上の任意のベクトル場 X, Y に対して成り立つ．ここで $\omega(Y)\cdot\theta(X)$ は $\omega(Y) \in \mathfrak{gl}(n, R)$ の $\theta(X) \in R^n$ に対する作用を表している．

[証明]　次の三つの場合を考えれば十分である．

(i)　$X = A^*$, $Y = B^*$, ただし $A, B \in \mathfrak{gl}(n, R)$, このとき方程式の右辺は0で，

左辺は

$$\frac{1}{2}\{A^*\theta(B^*)-B^*\theta(A^*)-\theta([A^*,B^*])\}$$

に等しく，したがって 0.

（ii） X, Y が共に水平のとき，方程式は Θ の定義に他ならない．

（iii） $X=A^*$, $A\in\mathfrak{gl}(n,R)$, $Y=B(\xi)$ $(\xi\in R^n)$ のとき方程式の右辺は $-(1/2)\omega(A^*)\cdot\theta(B(\xi))=-(1/2)A\cdot\xi$ に等しい．左辺は

$$\frac{1}{2}\{A^*\cdot\theta(B(\xi))-B(\xi)\cdot\theta(A^*)-\theta([A^*,B(\xi)])\}=-\frac{1}{2}\theta([A^*,B(\xi)])$$

前節の定理 2 から $[A^*,B(\xi)]=B(A\cdot\xi)$ であるから，上式は $-(1/2)\theta(B(A\cdot\xi))=-(1/2)A\cdot\xi$ に等しい．これで証明が終った．

さて B_1, B_2 を二つの基底ベクトル場として括弧積 $[B_1, B_2]$ をとる．第 2 章 §4 でのように $[B_1, B_2]$ の垂直成分は $\omega([B_1, B_2])=-2\Omega(B_1, B_2)$ で与えられる．点 u における水平成分が $(B(\xi))_u$ に等しいとして，この $\xi\in R^n$ を求めよう．上の定理の証明 (ii) の場合から

$$\Theta(B_1,B_2)=d\theta(B_1,B_2)=\frac{1}{2}\{B_1\cdot\theta(B_2)-B_2\cdot\theta(B_1)-\theta([B_1,B_2])\}$$

$$=\frac{1}{2}\theta(-B(\xi))=-\frac{1}{2}\xi$$

すなわち $\xi=-2\Theta(B_1,B_2)$ となる．

系 二つの基底ベクトル場 B_1, B_2 に対し，$[B_1, B_2]$ の水平成分は $B(\xi)$，ここで $\xi=-2\Theta(B_1,B_2)$ で与えられる．

§3. 共変微分演算

第 2 章 §9 でのべたように，主ファイバー束 $P(M,G)$ の接続は P に同伴した任意のファイバー束に対して M の曲線に沿うファイバーの平行移動をひきおこす．多様体 M の線形接続すなわち $P=L(M)$ の接続の場合には，接ベクトル束 $T(M)$ を考えることによって，M の曲線に沿う接ベクトルの平行移動が得られることになる．M の点 x_0 から x_1 に至る曲線 τ に対して，それに沿う平行移動は接空間 $T_{x_0}(M)$ から $T_{x_1}(M)$ の上への線形同形写像

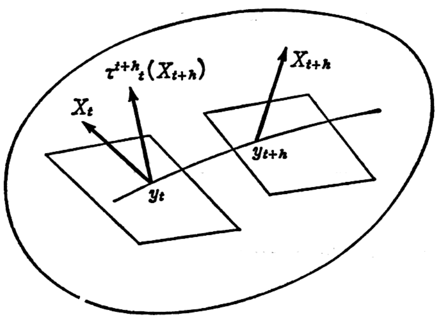
である.

また同じく第2章§9で論じたベクトル束のときの特別の場合であるが，M の線形接続から，$T(M)$ の切り口，すなわちベクトル場に対する**共変微分演算** (covariant differentiation) が定義できる．これをもう一度説明しよう．

まず M の曲線 y_t が，簡単のため $[0, 1]$ で与えられているとしよう．また，曲線に沿うベクトル場 X すなわち正確には $[0,1]$ から $T(M)$ への微分可能写像 $t \to X_t$ で各 t について $X_t \in T_{y_t}(M)$ となるものが与えられているとする．このとき y_{t+h} から y_t までの逆向きの曲線の部分に沿う平行移動を ${\tau^{t+h}}_t$ で表して

$$(1) \qquad \nabla_t X = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[{\tau^{t+h}}_t(X_{t+h}) - X_t] \in T_{y_t}(M)$$

とおく(3-2図)．(1) の極限の存在を確かめるために，これをかき直してみよう．$y_t\,(0 \leqq t \leqq 1)$ の $L(M)$ への水平持ち上げを $v_t\,(0 \leqq t \leqq 1)$ 一つきめると，



3-2 図

$${\tau^{t+h}}_t(X_{t+h}) = v_t \cdot {v_{t+h}}^{-1}(X_{t+h})$$

となる．各 t に対し，X_t の点 v_t における水平持ち上げを $X_t{}^*$ とすると，曲線 v_t に沿う $L(M)$ のベクトル場 $X_t{}^*$ が得られる．§1 で定義した1次微分形式 θ を使って

$$\theta(X_{t+h}{}^*) = {v_{t+h}}^{-1}(X_{t+h}), \qquad \theta(X_t{}^*) = {v_t}^{-1}\cdot(X_t)$$

となるから

$$\frac{1}{h}[{\tau^{t+h}}_t(X_{t+h}) - X_t] = v_t \cdot \left[\frac{\theta(X_{t+h}{}^*) - \theta(X_t{}^*)}{h}\right]$$

したがって (1) は

$$(2) \qquad \nabla_t X = v_t \cdot \frac{d\theta(X_t{}^*)}{dt}$$

とかきかえることができる．右辺の微係数の存在は明らかである．

$\nabla_t X$ を曲線 y_t に沿うベクトル場の曲線に沿う**共変微分**とよぶ.

次に X を M 上のベクトル場，Y は1点 p の接ベクトルとする．p を始点，Y を接ベクトルとする曲線 y_t $(0 \leqq t \leqq \varepsilon)$ をとり $X_t = X_{y_t}$ の曲線 y_t に沿う共変微分 $\nabla_t X$ の $t=0$ における値 $(\nabla_t X)_{t=0} \in T_p(M)$ を $\nabla_Y X$ と定義したい．これが Y にのみ関係し，上のような曲線 y_t のとり方に無関係であることを示すために，X の $L(M)$ への水平持ち上げを X^* とし，また $\pi(v)=p$ となる任意の点 $v \in L(M)$ での Y の水平持ち上げを Y^* とする．さらに上のような曲線 y_t の v から始まる水平持ち上げを v_t $(0 \leqq t \leqq \varepsilon)$ とする．このとき (2) から

(2′) $$(\nabla_t X)_{t=0} = v\cdot(Y^*\theta(X^*))$$

となる．(2′) は $(\nabla_t X)_{t=0}$ が Y の持ち上げ Y^* にのみ依存し，また $L(M)$ の点 v のとり方にも無関係であることを示している．

$\nabla_Y X$ をベクトル場 X の $Y \in T_p(M)$ に関する**共変微分**または**共変導ベクトル** (covariant derivative) とよぶ．$X \to \nabla_Y X$ を**共変微分演算** (covariant differentiation) とよぶ．

さらに，X, Y が M 上のベクトル場であるとき

$$(\nabla_Y X)_p = \nabla_{Y_p} X, \qquad p \in M$$

としてベクトル場 $\nabla_Y X$ が得られる．これが微分可能であることを示すために，X, Y の $L(M)$ への水平持ち上げを X^*, Y^* とする．さて第2章 §9 の補題の特別の場合として

補題 M の微分可能ベクトル場 X と $L(M)$ から R^n への微分可能関数 f で $f(ua)=a^{-1}f(u)$ $(a \in GL(n, R))$ という性質をもつものとが1対1に対応する．この対応は X の水平持ち上げを X^* として $f=\theta(X^*)$ である．

さて，$f=\theta(X^*)$ に対して Y^*f という関数も補題にある性質をもっているから，M 上のある微分可能ベクトル場に対応することになる．(2′) によれば，そのベクトル場が $\nabla_Y X$ に他ならない．すなわち

(3) $$(\nabla_Y X)_x = u(Y_u{}^*\theta(X^*)), \qquad \pi(u)=x$$

ベクトル場 X が与えられたとき1点 x における $(\nabla_Y X)_x$ の値は Y_x にのみ依存することは定義から明らかである．また点 x の近傍 U 上でベクトル場

X_1, X_2 が一致するとき，$\nabla_Y X_1$ と $\nabla_Y X_2$ とは U 上で一致することも (3) から従う.

また式 (3) は M 上のYに関する共変微分演算は，$L(M)$ 上の Y^* に関する微分演算に対応していることを示している．共変微分演算は平行移動を媒介にした微分であり，一方水平ベクトル Y^* は平行移動を定義する水平曲線の接ベクトルである事情を反映しているといってよい.

$\nabla_Y X$ という演算の性質をまとめて

定 理 写像

$$(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \nabla_Y X \in \mathfrak{X}(M)$$

は次の4条件をみたす.

1) $$\nabla_{Y_1+Y_2}X = \nabla_{Y_1}X + \nabla_{Y_2}X$$

2) $$\nabla_{\varphi Y}X = \varphi\nabla_Y X$$

3) $$\nabla_Y(X_1 + X_2) = \nabla_Y X_1 + \nabla_Y X_2$$

4) $$\nabla_Y(\varphi X) = (Y\varphi)X + \varphi\nabla_Y X$$

ここで $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $\varphi \in \mathfrak{F}(M)$ である.

[**証 明**] 1) Y_1, Y_2 の水平持ち上げを Y_1^*, Y_2^* とすれば，$Y_1 + Y_2$ の水平持ち上げは $Y_1^* + Y_2^*$ であることから式 (3) により明らか. 2), 3) は同様.

4) を証明するために X の水平持ち上げを X^*, $\varphi^* = \varphi\cdot\pi$ とおくと，φX の水平持ち上げは $\varphi^* X^*$ に等しく式 (3) から

$$\begin{aligned}(\nabla_Y(\varphi X))_x &= u(Y_u{}^*\theta(\varphi^* X^*)) = u(Y_u{}^*(\varphi^*\theta(X^*)))\\ &= u((Y_u{}^*\varphi^*)\theta(X^*) + \varphi^* Y_u{}^*\theta(X^*))\end{aligned}$$

ここで

$$Y_u{}^*\varphi^* = Y_x\varphi, \qquad u\cdot\theta(X^*) = X_x, \qquad \varphi^*(u) = \varphi(x)$$

であるから $\nabla_Y(\varphi X) = (Y\varphi)X + \varphi\nabla_Y X$ を得る.

多様体 M が線形接続をもつとき，M の任意の開部分多様体 U は自然に線形接続をもつことになる．すなわち M の接 n 枠束 $L(M)$ を U に制限したものが U の接n枠束 $L(U)$ であるから，$L(M)$ の接続は自然に $L(U)$ の接続を定めることになる．このことから U 上の微分可能ベクトル場の全体を $\mathfrak{X}(U)$ としたとき

$$(X, Y) \in \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \nabla_Y X \in \mathfrak{X}(U)$$

という写像が U の線形接続の共変微分演算として定まる．実は，定理にある 4 条件をみたす写像

$$(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \nabla_Y X \in \mathfrak{X}(M)$$

が与えられているとすると（あとで示すように，それは M 上のある線形接続に関する共変微分演算であることになるのであるが，いまそのことを知らないとして）任意の開部分多様体 U に対して

$$(X, Y) \in \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \nabla_Y X \in \mathfrak{X}(U)$$

という写像で，定理と同様の 4 条件をみたすものが得られる．この事実を証明するために，まず次の補題を示そう（この補題の中の条件は，共変微分演算の場合には，すでに式 (3) の後で確かめたことに注意しておく）．

補 題 定理の 4 条件 1) - 4) をみたす写像はまた次の条件をみたす．

5) 開集合 W 上で $Y_1 = Y_2$ ならば $\nabla_{Y_1}X$ と $\nabla_{Y_2}X$ は W 上で一致する．

6) 開集合 W 上で $X_1 = X_2$ ならば $\nabla_Y X_1$ と $\nabla_Y X_2$ は W 上で一致する．

［**証 明**］ 5) を証明するために x を W の任意の点とし，$\varphi(x) = 1$ で W の外では 0 になるような $\varphi \in \mathfrak{F}(M)$ をとる．仮定により φY_1 と φY_2 は W 上で一致．W の外では共に 0 であるからベクトル場として $\varphi Y_1 = \varphi Y_2$．したがって $\nabla_{\varphi Y_1}X = \nabla_{\varphi Y_2}X$ である．条件 2) により

$$\varphi \nabla_{Y_1}X = \varphi \nabla_{Y_2}X$$

これを点 x で考えると $\varphi(x) = 1$ だから $(\nabla_{Y_1}X)_x = (\nabla_{Y_2}X)_x$ を得る．x は W の任意の点だから $\nabla_{Y_1}X$ と $\nabla_{Y_2}X$ とは W 上で一致する．6) の証明も同様である．

さて U を開部分多様体とする．$X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ に対して $\nabla_Y X \in \mathfrak{X}(U)$ を次のように定義する．U の任意の点 x に対して $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M)$ で，x の U に含まれる近傍 W の上でそれぞれ X, Y と一致するものをとるとする．このとき $\nabla_{Y_1}X_1$ の x での値は X_1, Y_1 のとり方に無関係であることが補題を使って容易にわかる．したがって

$$(\nabla_Y X)_x = (\nabla_{Y_1}X_1)_x$$

と定義することによりベクトル場 $\nabla_Y X$ が U 上で定まる．$\nabla_Y X \in \mathfrak{X}(U)$ であること，写像 $(X, Y) \to \nabla_Y X$ が定理の条件 1) - 4) を満足することも容易に

確かめられる．

M の線形接続にもどって，共変微分演算 ∇_Y を M 上の任意のテンソル場 K に対して拡張することができる．そのために (r,s) 型のテンソル束 $T^r{}_s(M)$ を $L(M)$ に同伴したベクトル束と考えて，$L(M)$ の接続から定まる $T^r{}_s(M)$ のファイバーの平行移動が得られる．したがって K が M の曲線 y_t に沿って定義された (r,s) 型のテンソル場であるとき，ベクトル場のときの (1) と同様にして $\nabla_t K$ が定義できる．実際 (1) に現れる $\tau^{t+h}{}_t$ を $T_{y_{t+h}}(M)$ の上のテンソル空間から $T_{y_t}(M)$ の上のテンソル空間の同形写像に拡張したものがテンソル束の平行移動であるから

$$\nabla_t K=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\tau^{t+h}{}_t(K_{t+h})-K_t] \tag{4}$$

となる．また，Kが M 上の (r,s) 型のテンソル場で Y がベクトル場であるときの $\nabla_Y K$ の定義は K がベクトル場であるときと同様にすればよい．$\nabla_Y K$ を K の Y に関する**共変導テンソル** (covariant derivative) とよぶ．

微分形式 ω の外微分 $d\omega$ と同じような考え方で，テンソル場 K の**共変微分** (covariant differential) を $(r,s+1)$ 型のテンソル場として，次のように定義する．

Kは任意のベクトル場 $X_1,\cdots,X_s$ に対して $(r,0)$ 型のテンソル場 $K(X_1,\cdots,X_s)$ を対応させる写像と考えてもよいが，∇K は $X_1,\cdots,X_s,X_{s+1}$ という $(s+1)$ 個のベクトル場に対して $(r,0)$ 型のテンソル場 $(\nabla_X K)(X_1,\cdots,X_s)$ を対応させる $(r,s+1)$ 型のテンソル場である．これを

$$(\nabla K)(X_1,\cdots,X_s;X)=(\nabla_X K)(X_1,\cdots,X_s) \tag{5}$$

とかく．左辺で X の前のセミコロンは X が新しい変数であることを示す．また次の節で，局所座標系に関する ∇K の成分に現れる慣習のセミコロンに対応するものになっていることがわかる．

一番よく現れる例は $r=1$ のときである．特に $(1,0)$ 型のテンソル場すなわちベクトル場 X に対して，∇X はベクトル場 Y を $\nabla_Y X$ にうつす $(1,1)$ 型のテンソル場，いいかえれば，各点の接空間の線形写像を与えるテンソル場

である：

$$(\nabla X)(;Y)=\nabla_Y X$$

K が $(1,s)$ 型のテンソル場のときは

$$(6)\quad \begin{aligned}&(\nabla K)(X_1,\cdots,X_s;X)\\ &=\nabla_X(K(X_1,\cdots,X_s))-\sum_{i=1}^{s}K(X_1,\cdots,\nabla_X X_i,\cdots,X_s)\end{aligned}$$

という公式が成り立つ.

問 上の公式を証明せよ.

§4. クリストッフェル記号 $\Gamma_i{}^k{}_j$

線形接続からベクトル場の共変微分演算 $\nabla_Y X$ が得られるが，これを座標系を使って表現することを考えよう.

多様体 M の上の線形接続は M の接 n 枠束 $P=L(M)$ の接続である. M の開部分多様体 U に対してその接 n 枠束 $L(U)$ は P の U への制限すなわち $\pi^{-1}(U)$ に他ならないから，P の接続を $\pi^{-1}(U)$ に制限することによって U の線形接続が自然にきまってくる. 特に U が座標系 $\{x^1,x^2,\cdots,x^n\}$ をもつ開集合であるとき，ベクトル場 $X_i=\partial/\partial x^i$ $(1\leqq i\leqq n)$ に対して $\nabla_{X_j}X_i$ が U 上のベクトル場としてきまるから

$$(1)\qquad \nabla_{X_j}X_i=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_j{}^k{}_i X_k,\qquad 1\leqq i,\, j\leqq n$$

とかいて $(x^1,\cdots,x^n)$ の n^3 個の関数

$$\Gamma_i{}^k{}_j=\Gamma_i{}^k{}_j(x^1,\cdots,x^n),\qquad 1\leqq i,\, j,\, k\leqq n$$

が得られる. これらを局所座標系 $\{x^1,\cdots,x^n\}$ に関する**クリストッフェル記号** (Christoffel symbols) または**接続係数** (coefficients of the connection) とよぶ.

他の局所座標系 $\{\bar{x}^1,\bar{x}^2,\cdots,\bar{x}^n\}$ に関するクリストッフェル記号を $\bar{\Gamma}_j{}^k{}_i$ とするとき，両方の座標近傍の共通集合の上では

$$(2)\qquad \bar{\Gamma}_i{}^k{}_j=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\bar{x}^i\partial\bar{x}^j}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^\alpha}+\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{n}\Gamma_\alpha{}^\gamma{}_\beta\frac{\partial x^\alpha}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^\gamma}$$

という関係が成り立つ.

問 この関係を導き出せ.

逆に，多様体 M が座標近傍の族で被われ，その各座標系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ に対し n^3 個の関数 $\Gamma_i{}^k{}_j = \Gamma_i{}^k{}_j(x^1, \cdots, x^n)$ が (2) の関係をいつも共通部分でみたすように与えられているとしよう．そのときまず各座標近傍 U において座標系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ を用いて

$$X = \sum_{j=1}^{n} \xi^j \partial/\partial x^j, \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} \eta^i \partial/\partial x^i \tag{3}$$

に対して

$$\nabla_Y{}^U X = \sum_{i,k=1}^{n} \eta^i \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{n} \Gamma_i{}^k{}_j \xi^j \right) \partial/\partial x^k \tag{4}$$

とおくことによって写像

$$(X, Y) \in \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \nabla_Y{}^U X \in \mathfrak{X}(U)$$

を定義すると，これは §3 の定理での 4 条件をみたすことがわかる．

さて，M の上のベクトル場 X, Y に対して $\nabla_Y X$ を次のように定めよう．M の点 p に対して p を含む座標近傍を U として

$$(\nabla_Y X)_p = (\nabla_{Y_U}{}^U X_U)_p \tag{5}$$

ここで X_U, Y_U はそれぞれ X, Y の U への制限とする．このとき右辺の値は p を含む座標近傍のとり方に無関係であることは (2) の関係式から確かめることができる．

問　これを確かめよ．

このようにしてベクトル場 $\nabla_Y X$ がきまるが，各点 p の近傍で微分可能であることは (4) から明らかである．したがって写像

$$(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \nabla_Y X \in \mathfrak{X}(M)$$

が定義でき，それが §3 の定理の 4 条件をみたしていることは (5) から明らかである．

n 次元アファイン空間 R^n の標準線形接続とは，R^n の接 n 枠束 $L(R^n)$ を自明な主ファイバー束 $R^n \times GL(n, R)$ と考えたときの平坦な接続のことであるが，　これは結局次のことを意味する．　R^n の任意のアファイン座標系を $\{x^1, \cdots, x^n\}$ とすると，ベクトル場 $\{\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^n\}$ によって $L(R^n)$ の切り口が与えられ，各ベクトル場 $\partial/\partial x^j$ はどの曲線に沿っても平行であるから $\nabla_{\partial/\partial x^i} \partial/\partial x^j = 0$ したがって $\{x^1, \cdots, x^n\}$ に関するクリストッフェル記号

$\Gamma_i{}^k{}_j$ はすべて0に等しい．

問 アファイン空間 R^n において $\nabla_{\partial/\partial x^i}(\sum_{j=1}^n x^j\partial/\partial x^j)$ を計算せよ．

以下，与えられた線形接続の $\Gamma_i{}^k{}_j$ を用いて，任意のテンソル場の共変微分をかき表すことを説明しよう．

$\{x^1, \cdots, x^n\}$ を局所座標系とし，ベクトル場 X, Y が (3) のようにそれぞれの成分 $(\xi^i), (\eta^i)$ をもつとき，∇X は (4) のように表される．特に $Y=\partial/\partial x^i$ のときには

$$\nabla_{\partial/\partial x^i}X=\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial\xi^k}{\partial x^i}+\sum_{j=1}^n\Gamma_i{}^k{}_j\xi^j\right)\partial/\partial x^k$$

となるが，ここで

$$\xi^k{}_{;i}=\frac{\partial\xi^k}{\partial x^i}+\sum_{j=1}^n\Gamma_i{}^k{}_j\xi^j \tag{6}$$

とおくと，上の式は

$$\nabla_{\partial/\partial x^i}X=\sum_{k=1}^n\xi^k{}_{;i}\partial/\partial x^k \tag{7}$$

とかける．すなわち，i を定めて k が1から n を動くとき，$(\xi^k{}_{;i})$ は座標近傍で定義された $\nabla_{\partial/\partial x^i}X$ の成分であるといってよい．

次に，X の共変微分 ∇X はベクトル Y を $\nabla_Y X$ にうつす (1,1) 型のテンソル場で，

$$\nabla X=\sum_{i,k=1}^n\xi^k{}_{;i}(\partial/\partial x^k)\otimes dx^i \tag{8}$$

とかける．したがって，k と i とが共に1から n まで動くときの n^2 個の $(\xi^k{}_{;i})$ が ∇X の成分である．テンソル場 ∇X は X と同じ定義域をもっている．

次に，1次の微分形式 φ を (0,1) 型のテンソル場と考えて，その共変導テンソル $\nabla_Y\varphi$ を考えよう．φ はベクトル場 X に $\varphi(X)$ という関数を対応させる写像であるから，§3 の終の公式 (5) と同じようにして，

$$(\nabla_Y\varphi)(X)=Y(\varphi(X))-\varphi(\nabla_Y X) \tag{9}$$

が成り立つことになる．さて，局所座標系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ に関して

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k dx^k$$

とおき，$Y = \partial/\partial x^i$，$X = \partial/\partial x^j$ として (9) を適用するためにまず

$$Y(\varphi(X)) = Y(\varphi_j) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i}$$

$$\varphi(\nabla_Y X) = \varphi(\sum_{k=1}^{n} \Gamma_i{}^k{}_j \partial/\partial x^k) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_i{}^k{}_j \varphi_k$$

であるから (9) により

$$(\nabla_Y \varphi)(X) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_i{}^k{}_j \varphi_k$$

ここで

$$\varphi_{j;i} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_i{}^k{}_j \varphi_k \tag{10}$$

とおくと，φ の共変導テンソル $\nabla_{\partial/\partial x^i}\varphi$ (座標近傍の上の１次の微分形式である) の成分は i を定め，j が１から n まで動くときの $(\varphi_{j;i})$ であることがわかる．一方，φ の共変微分 $\nabla\varphi$ (これは (0, 2) 型のテンソル場である) の成分は，j, i が共に１から n まで動いたときの $(\varphi_{j;i})$ である．すなわち

$$(\nabla\varphi)(\partial/\partial x^j, \partial/\partial x^i) = (\nabla_{\partial/\partial x^i}\varphi)(\partial/\partial x^j) = \varphi_{j;i}$$

が成り立つ．$\nabla\varphi$ の定義域は φ と同じである．

以上のことをもっと一般にすると K が (r, s) 型のテンソル場で

$$(K^{i_1 \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots j_s})$$

が局所座標系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ に関する成分であるとき

$$K^{i_1 \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots j_s;k} = \frac{\partial K^{i_1 \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots j_s}}{\partial x^k} + \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \Gamma_k{}^{i_\alpha}{}_l K^{i_1 \cdots l \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots j_s} - \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \Gamma_k{}^m{}_{j_\beta} K^{i_1 \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots m \cdots j_s} \tag{11}$$

とおく．右辺の第２項で上添字 l は α 番目，第３項で下添字 m は β 番目である．

座標近傍上のテンソル $\nabla_{\partial/\partial x^k}K$ の成分は，(11) で k をきめて，$i_1, \cdots, i_r$, $j_1, \cdots, j_s$ が１から n まで動くことによって与えられる．

共変微分 ∇K は K と同じ定義域をもつ $(r, s+1)$ 型のテンソル場で，そ

の成分は $k, i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s$ のすべてが1からnまで動くときの (11) によって与えられる.

問 $r=1,\ s=1,\ K=(K^i{}_j)$ のとき

$$K^i{}_{j;k}=\frac{\partial K^i{}_j}{\partial x^k}+\sum_{l=1}^{n}\Gamma_k{}^i{}_l K^l{}_j-\sum_{m=1}\Gamma_k{}^m{}_j K^i{}_m$$

であることを確かめよ.

問 $r=1,\ s=2,\ K=(K^i{}_{j_1j_2})$ に対して $K^i{}_{j_1j_2;k}$ をかけ.

高次の共変微分 $\nabla^2K, \nabla^3K, \cdots$ の定義は明らかであるが，それらの成分

$$K^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s;k;l},\quad K^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s;k;l;m},\quad \cdots$$

も (11) を逐次適用することによって得られる.

§5. 捩率テンソルと曲率テンソル

ここでは，線形接続の捩率テンソル場 (torsion tensor field)，曲率テンソル場 (curvature tensor field) を定義しよう．これらのテンソル場のことを簡単のために，捩率テンソル，曲率テンソル，さらに捩率，曲率ということも多い.

§2 で，接n枠束 $P=L(M)$ 上の捩率形式 Θ を定義したが，これから M の上の捩率テンソル場を次のように導くことができる．すなわち，M の点 x と $X, Y\in T_x(M)$ に対して $\pi(u)=x$ となる P の点uをとり，X^*, Y^* をuにおける X, Y の水平持ち上げとしたとき

$$u\cdot 2\Theta_u(X^*, Y^*)$$

は，$T_x(M)$ の元であって，x の上の点 u のとり方には関係しないことが，任意の $a\in GL(n, R)$ に対して $R_a{}^*\Theta=a^{-1}\Theta$ という性質を用いてわかる．したがって

$$T_x(X, Y)=u\cdot 2\Theta_u(X^*, Y^*) \tag{1}$$

とおいて，xにおける (1, 2) 型のテンソル T_x が定義できる．$x\to T_x$ を**捩率テンソル場**という．明らかに

$$T(Y, X)=-T(X, Y)$$

が成り立つ.

この捩率テンソル場 T を P を使わないで，M の上の共変微分作用素だけ

を使って表すことができる．そのために X, Y を M のベクトル場，X^*, Y^* をその水平持ち上げとして $\Theta = D\theta$ の定義にもどると

$$2\Theta(X^*, Y^*) = X^*\theta(Y^*) - Y^*\theta(X^*) - \theta([X^*, Y^*])$$

という式が得られる．ここで §3 の式 (3) により

$$X_u{}^*\theta(Y^*) = (\nabla_X Y)_x, \qquad Y_u{}^*\theta(X^*) = (\nabla_Y X)_x$$

さらに $[X^*, Y^*]$ の水平成分が $[X, Y]$ の水平持ち上げであることに注意すれば

$$u\cdot\theta_u([X^*, Y^*]) = [X, Y]_x$$

であるから，上の式により

$$T_x(X, Y) = (\nabla_X Y)_x - (\nabla_Y X)_x - [X, Y]_x$$

が得られる．x は M の任意の点だから結局

(2)　$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

が得られる．

この式 (2) を捩率テンソル場 T の定義に使うことができる．すなわち

$$(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$$

という写像を考えると，これは微分可能関数について双線形であることが確かめられる．したがって (1,2) 型のテンソル場を定めるから，これを T とかき，捩率テンソル場とよぶことができる．

曲率テンソル場も，P の上の曲率形式 Ω から導くことができる．そのために Ω は $\mathfrak{gl}(n, R)$ の値をとる 2 次微分形式であることから，$X, Y, Z \in T_x(M)$ の $u \in P$ $(\pi(u) = x)$ での水平持ち上げを X^*, Y^*, Z^* とかいて

(3)　$$u\cdot 2\Omega_u(X^*, Y^*)\cdot\theta(Z^*) \in T_x(M)$$

を考えると，これが u のとり方には無関係であることがわかる．この $T_x(M)$ の元を $R(X, Y)Z$ とかく．このようにして定まる (1,3) 型のテンソル場 R を**曲率テンソル場**とよぶ．

詳細は省略するが，ちょうど (1) から (2) を導いたのと同様にして (3) から $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

(4)　$$R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

を導くことができる．T のときと同様に，(4) を曲率テンソル場 R の定義と

考えてもよい．すなわち (4) で定まる

$$(X, Y, Z) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to R(X, Y)Z \in \mathfrak{X}(M)$$

という写像を考えると，X, Y, Z にそれぞれに関して微分可能関数の上で3重線形になっていることが，多少退屈だがやさしい計算で確かめられるから，これで (1,3) 型のテンソル場 R が定義されたことになる．(3) または (4) から

$$R(Y, X) = -R(X, Y)$$

であることは明らかである．ここで $R(X, Y)$ は Z を $R(X, Y)Z$ にうつす線形写像である．

問 (4) で定義される R について，M 上の微分可能関数 φ に対して

$$R(\varphi X, Y)Z = R(X, \varphi Y)Z = R(X, Y)\varphi Z = \varphi R(X, Y)Z$$

であることを確かめよ．

以上で捩率テンソル場 T，曲率テンソル場 R が定義できたが，局所座標系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ に関するクリストッフェル記号 $\Gamma_i{}^k{}_j$ を用いて T, R の成分を求めることは容易である．すなわち

$$T(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) = \sum_{k=1}^n T^k{}_{ij}\partial/\partial x^k$$

とかくと，(2) において $X = \partial/\partial x^i, Y = \partial/\partial x^j$ とおき $[X, Y] = 0$ であることに注意すると

$$(5) \qquad T^k{}_{ij} = \Gamma_i{}^k{}_j - \Gamma_j{}^k{}_i$$

が得られる．$T^k{}_{ji} = -T^k{}_{ij}$ が成り立つ．

さらに

$$R(\partial/\partial x^j, \partial/\partial x^k)\partial/\partial x^m = \sum_{i=1}^n R^i{}_{mjk}\partial/\partial x^i$$

とかくと (4) において $X = \partial/\partial x^j$，$Y = \partial/\partial x^k$，$Z = \partial/\partial x^m$ とおいて $[X, Y] = 0$ であることに注意すると

$$(6) \qquad R^i{}_{mjk} = \frac{\partial \Gamma_k{}^i{}_m}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_j{}^i{}_m}{\partial x^k} + \sum_{s=1}^n (\Gamma_j{}^i{}_s \Gamma_k{}^s{}_m - \Gamma_k{}^i{}_s \Gamma_j{}^s{}_m)$$

が得られる．$R^i{}_{mkj} = -R^i{}_{mjk}$ が成り立つ．

問 (6) を確かめよ．

T の成分 $T^k{}_{ij}$ は比較的簡単であるが，R の成分 $R^i{}_{mjk}$ については添字の位置とその意味に注意することが大切である．j, k は $R(\partial/\partial x^j, \partial/\partial x^k)$ というように R の中に入れるベクトル場 $\partial/\partial x^j$, $\partial/\partial x^k$ を表して，この線形写像 $R(\partial/\partial x^j, \partial/\partial x^k)$ を行列で表すのに必要な添字が i, m である．

§6. ビアンキの恒等式

一般の線形接続の捩率テンソル T, 曲率テンソル R が満足する重要な **ビアンキの恒等式** (Bianchi identity) とよばれる式が二つある．それをのべるために，まず T と R の共変導テンソルは §3 の式 (5) によって

(1) $(\nabla_Z T)(X, Y) = \nabla_Z(T(X, Y)) - T(\nabla_Z X, Y) - T(X, \nabla_Z Y)$

(2) $(\nabla_Z R)(X, Y)W = \nabla_Z(R(X, Y)W) - R(X, Y)(\nabla_Z W)$
$\qquad - R(\nabla_Z X, Y)W - R(X, \nabla_Z Y)W$

というように表すことができることに注意しておこう．ここで X, Y, Z, W は M 上のベクトル場である．2 番目の式は W を省略し，演算子の括弧積を使うことによって

(3) $(\nabla_Z R)(X, Y) = [\nabla_Z, R(X, Y)] - R(\nabla_Z X, Y) - R(X, \nabla_Z Y)$

と簡易化することができる．

記号として，一般に三つの“変数” X, Y, Z に依存するもの $K(X, Y, Z)$ があるとき，

$$\mathfrak{S}\{K(X, Y, Z)\} = K(X, Y, Z) + K(Y, Z, X) + K(Z, X, Y)$$

とかき，これを $K(X, Y, Z)$ の巡回和とよぶことにする．

定理 1 (**ビアンキの第1恒等式**) 任意のベクトル場 X, Y, Z に対して

(4) $\mathfrak{S}\{R(X, Y)Z\} = \mathfrak{S}\{T(T(X, Y), Z)\} + \mathfrak{S}\{(\nabla_X T)(Y, Z)\}$

が成り立つ．特に $T = 0$ のときは

(5) $$\mathfrak{S}\{R(X, Y)Z\} = 0$$

[証明] 前節の式 $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ および $T(Y, X) = -T(X, Y)$ を用いると

$$T(T(X, Y), Z) = T(\nabla_X Y, Z) + T(Z, \nabla_Y X) - T([X, Y], Z)$$

が得られる．この式と (1) から

$$\mathfrak{S}\{T(T(X,Y),Z)\} = -\mathfrak{S}\{(\nabla_Z T)(X,Y)\} + \mathfrak{S}\{\nabla_Z(T(X,Y)) - T([X,Y],Z)\}$$

となる．ここで

$$\nabla_Z(T(X,Y)) = \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y])$$
$$T([X,Y],Z) = \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_Z[X,Y] - [[X,Y],Z]$$

であるから

$$\nabla_Z(T(X,Y)) - T([X,Y],Z) = \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[X,Y]}Z + [[X,Y],Z]$$

ここで巡回和 $\mathfrak{S}$ をとると，ヤコビ恒等式から

$$\mathfrak{S}\{[[X,Y],Z]\} = 0$$

一方

$$\mathfrak{S}\{\nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[X,Y]}Z\}$$

は

$$\mathfrak{S}\{\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z\}$$

とかきかえてもよいから，結局 $\mathfrak{S}\{R(X,Y)Z\}$ に等しいことがわかる．以上のことから

$$\mathfrak{S}\{T(T(X,Y),Z)\} = -\mathfrak{S}\{(\nabla_Z T)(X,Y)\} + \mathfrak{S}\{R(X,Y)Z\}$$

すなわち (4) が得られる．

問 $T=0$ のとき $\mathfrak{S}\{R(X,Y)Z\}=0$ であることを直接に確かめよ．

定理 2 (**ビアンキの第 2 恒等式**) 任意のベクトル場 X, Y, Z に対して

(6) $$\mathfrak{S}\{(\nabla_Z R)(X,Y) + R(T(X,Y),Z)\} = 0$$

特に $T=0$ ならば

(7) $$\mathfrak{S}\{(\nabla_Z R)(X,Y)\} = 0$$

[証明] $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ を用いて

$$\mathfrak{S}\{R(T(X,Y),Z)\} = \mathfrak{S}\{R(\nabla_X Y,Z) - R(\nabla_Y X,Z) - R([X,Y],Z)\}$$
$$= \mathfrak{S}\{R(\nabla_X Y,Z) + R(Z,\nabla_Y X) - R([X,Y],Z)\}$$

右辺の $\mathfrak{S}$ において $R(\nabla_X Y,Z)$, $R(Z,\nabla_Y X)$ の代わりにそれぞれ $R(\nabla_Z X,Y)$, $R(X,\nabla_Z Y)$ とかきかえてよいから，式 (3) を使って

$$\mathfrak{S}\{R(T(X,Y),Z)\} = \mathfrak{S}\{R(\nabla_Z X, Y) + R(X, \nabla_Z Y) - R([X,Y],Z)\}$$
$$= -\mathfrak{S}\{(\nabla_Z R)(X,Y)\} + \mathfrak{S}\{[\nabla_Z, R(X,Y)] - R([X,Y],Z)\}$$

ここで $R(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$ を使って

$$[\nabla_Z, R(X,Y)] - R([X,Y],Z)$$
$$= [\nabla_Z, [\nabla_X, \nabla_Y]] - [\nabla_Z, \nabla_{[X,Y]}] - [\nabla_{[X,Y]}, \nabla_Z] + \nabla_{[[X,Y],Z]}$$
$$= [\nabla_Z, [\nabla_X, \nabla_Y]] + \nabla_{[[X,Y],Z]}$$

ここで巡回和をとると，演算子に対するヤコビ恒等式 $\mathfrak{S}\{[\nabla_Z, [\nabla_X, \nabla_Y]]\} = 0$ とベクトル場に対するヤコビ恒等式 $\mathfrak{S}\{[[X,Y],Z]\} = 0$ により，結局

$$\mathfrak{S}\{R(T(X,Y),Z)\} = -\mathfrak{S}\{(\nabla_Z R)(X,Y)\}$$

すなわち (6) が成り立つ．

問　$T=0$ のとき直接 (7) を証明せよ．

$T=0$ のときのビアンキの恒等式 (5), (7) を局所座標系に関する成分でかくとそれぞれ

(5′)　$$R^i{}_{jkl} + R^i{}_{klj} + R^i{}_{ljk} = 0$$

(7′)　$$R^i{}_{jkl;m} + R^i{}_{jlm;k} + R^i{}_{jmk;l} = 0$$

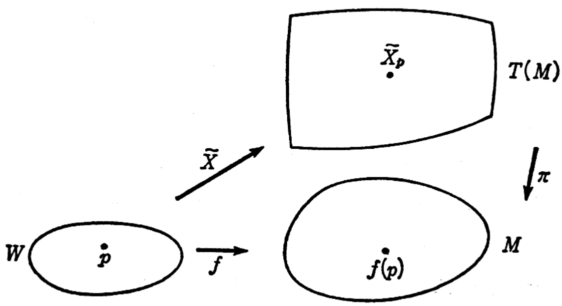
問　(5′), (7′) を導け．また (4), (6) を T, R の成分を用いて表せ．

§7. 写像に沿う共変微分演算

§3 の定理において多様体 M の線形接続から

$$(X,Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \nabla_Y X \in \mathfrak{X}(M)$$

という写像が得られることを知ったが，これをもう少し拡張しておくと応用が大変広くなる．



3-3 図

他の多様体 W から M への微分可能写像 f が与えられているとしよう．このとき **f に沿う（微分可能）ベクトル場**（vector field along f）とは，W から M の接ベクトル束 $T(M)$ への微分可能写像

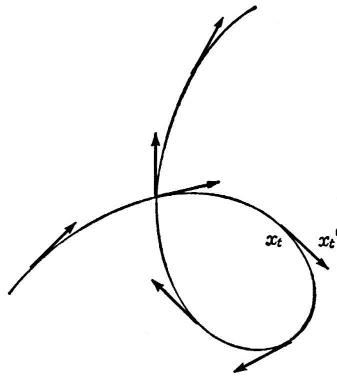
$$\tilde{X}:\quad p\in W\rightarrow \tilde{X}_p\in T(M)$$

であって，$T(M)$ から M への射影を π としたとき

$$\pi(\tilde{X}_p)=f(p),\qquad p\in W$$

を満足するものである（3－3 図）．f に沿うベクトル場の全体を $\mathfrak{X}_f$ と記すことにする．

一番簡単な例としては，W を1次元の開区間 (a,b) とし，f は $t\in(a,b)\rightarrow x(t)\in M$ で与えられる微分可能曲線であるとすると，各 t に対する曲線の接ベクトル $x'(t)$ は f に沿うベクトル場と考えられる（3－4 図）．



3－4 図

一般の $f:W\rightarrow M$ に沿うベクトル場の例として次の二つの場合が考えられる．

1) M 上のベクトル場 X に対して，

$$\tilde{X}_p=X_{f(p)},\qquad p\in W$$

として得られる $\tilde{X}$ は f に沿うベクトル場である．これを $\tilde{X}=X\circ f$ と表そう．

2) W 上のベクトル場 S に対して

$$\tilde{X}_p=(f_*)_p(S_p),\qquad p\in W$$

として得られる $\tilde{X}$ は f に沿うベクトル場である．これを $\tilde{X}=f_*(S)$ と表そう．

上でのべた曲線の接ベクトル場は 2) の特別な場合すなわち $x_t'=f_*(d/dt)$ として得られるわけである．

さて次の定理を証明しよう．

定理 1 M が線形接続をもち $(X,Y)\in\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\rightarrow\nabla_Y X\in\mathfrak{X}(M)$ をその共変微分演算としよう．多様体 W から M への微分可能写像 f が与え

られると，写像

$$(S, \tilde{X}) \in \mathfrak{X}(W) \times \mathfrak{X}_f \to \nabla_S \tilde{X} \in \mathfrak{X}_f$$

で次の性質をもつものが一意的に定まる．

1) $S_1, S_2 \in \mathfrak{X}(W)$ ならば

$$\nabla_{S_1+S_2}\tilde{X} = \nabla_{S_1}\tilde{X} + \nabla_{S_2}\tilde{X}$$

2) $\varphi \in \mathfrak{F}(W)$ ならば

$$\nabla_{\varphi S}\tilde{X} = \varphi \nabla_S \tilde{X}$$

3) $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2 \in \mathfrak{X}_f$ ならば

$$\nabla_S(\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2) = \nabla_S \tilde{X}_1 + \nabla_S \tilde{X}_2$$

4) $\varphi \in \mathfrak{F}(W)$ ならば

$$\nabla_S(\varphi \tilde{X}) = (S\varphi)\tilde{X} + \varphi \nabla_S \tilde{X}$$

ただし，ここで $(\varphi\tilde{X})_p = \varphi(p)\tilde{X}_p$ により $\varphi\tilde{X} \in \mathfrak{X}_f$ と考える．

5) $X \in \mathfrak{X}(M)$ ならば，各点 $p \in W$ で

$$(\nabla_S(X \cdot f))_p = \nabla_{f_*(S_p)} X$$

1)-4) をみたす写像 $\mathfrak{X}(W) \times x_f \to x_f$ を**f に沿う共変微分演算**(covariant differentiation along f) とよぶ．条件 5) により一意性が保証されることになる．

［証明］ $S \in \mathfrak{X}(W)$, $\tilde{X} \in \mathfrak{X}_f$ とする．W の任意の点 p に対し，それを始点とする S の積分曲線を p_t $(p_0 = p)$ とし，$y_t = f(p_t)$ とおく．y_t は M の曲線で，$\tilde{X}$ を y_t に沿うベクトル場 $t \to \tilde{X}_t = X_{p_t} \in T_{y_t}(M)$ と考えることができる．§3 の初めに定義した $(\nabla_t \tilde{X})_{t=0} \in T_{f(p)}(M)$ を $(\nabla_S \tilde{X})_p$ とおく．

このようにして $(\nabla_S \tilde{X})_p \in T_{f(p)}(M)$ が W の各点 p で定義でき，f に沿うベクトル場 $\nabla_S \tilde{X}$ が得られるがそれが微分可能であること，またこの演算が 1)-4) の性質をもつことをみるために次のように考える．

点 p に対し $f(p) \in M$ の座標近傍を U，その座標系を $\{x^1, \cdots, x^n\}$ として，さらに $f(V) \subset U$ となるような p の W における近傍 V を選ぶ．与えられた $\tilde{X} \in \mathfrak{X}_f$ は V 上で

$$(1) \qquad \tilde{X}_q = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(q)(\partial/\partial x^i)_{f(q)}, \qquad q \in V$$

とかくことができ，$\varphi^1, \cdots, \varphi^n$ は V 上の微分可能関数である．S の p からでる積分曲

線 p_t をとるとき，§3 の記号 $\tau^t{}_0$（点 y_t から y_0 への平行移動）を使って

$$\tau^t{}_0(\tilde{X}_{p_t})-\tilde{X}_p=\sum_{i=1}^n\varphi^i(p_t)\tau^t{}_0(\partial/\partial x^i)_{f(p_t)}-\sum_{i=1}^n\varphi^i(p_0)(\partial/\partial x^i)_{f(p_0)}$$

$$=\sum_{i=1}^n(\varphi^i(p_t)-\varphi^i(p_0))\tau^t{}_0(\partial/\partial x^i)_{f(p_t)}$$

$$+\sum_{i=1}^n\varphi^i(p_0)(\tau^t{}_0(\partial/\partial x^i)_{f(p_t)}-(\partial/\partial x^i)_{f(p_0)})$$

とかき，これを t で割って $t\to 0$ の極限をとると

$$(\nabla_S\tilde{X})_p=\sum_{i=1}^n(S_p\varphi^i)(\partial/\partial x^i)_{f(p)}+\sum_{i=1}^n\varphi^i(p)\lim_{t\to 0}\frac{\tau^t{}_0(\partial/\partial x^i)_{f(p_t)}-(\partial/\partial x^i)_{f(p_0)}}{t}$$

となる．右辺の第2項において $f(p_t)$ は $f(p)$ を始点とし，$f_*(S_p)$ を始点での接ベクトルとする M の曲線であるから，§3 で定義したように $\nabla_{f_*(S_p)}\partial/\partial x^i$（$M$ における共変微分）は

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tau^t{}_0(\partial/\partial x^i)_{f(p_t)}-(\partial/\partial x^i)_{f(p_0)}}{t}$$

で与えられる．したがって

$$(2)\qquad (\nabla_S\tilde{X})_p=\sum_{i=1}^n(S_p\varphi^i)(\partial/\partial x^i)_{f(p)}+\sum_{i=1}^n\varphi^i(p)\nabla_{f_*(S_p)}(\partial/\partial x^i)$$

となる．

(2) から $\nabla_S\tilde{X}$ が微分可能であることがわかる．また定理の条件 1)－4) が満足されていることも (2) から容易にわかる．

最後に定理の条件 1)－5) を満足するような演算があるとすれば，(1) で局所的に表される $\tilde{X}$ に対して必ず (2) が成立しなければならないから一意性がわかる．

注意 演算の存在を (1), (2) を用いて証明しようとすると，使う座標系のとり方に無関係に $\nabla_S\tilde{X}$ がきまることを確かめなければならないが，我々の証明では座標系を用いないで $\nabla_S\tilde{X}$ を初めに定義しているからその必要がない．

特別の場合として，f が区間 W から M への微分可能写像 $t\to x_t$ すなわち曲線である場合，これに沿うベクトル場 X に対して $\nabla_{d/dt}X$ が得られることになるが，これは §3 ですでに定義した ∇_tX に一致することは明らかである．M の座標近傍で

$$X_t=\sum_{i=1}^n\xi^i(t)(\partial/\partial x^i)_{x_t}$$

としたとき (2) から（$x_t'=\sum_{i=1}^n\dfrac{dx^i}{dt}\partial/\partial x^i$ をもちいて）

$$\nabla_t X_t = \sum_{k=1}^{n} \frac{d\xi^k}{dt}(\partial/\partial x^k)_{x_t} + \sum_{j=1}^{n} \xi^j(t) \nabla_{x_t'}(\partial/\partial x^j)_{x_t}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{d\xi^k}{dt}(\partial/\partial x^k)_{x_t}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \Gamma_i{}^k{}_j(x^1(t), \cdots, x^n(t)) \frac{dx^i}{dt} \xi^j(t) \right\} (\partial/\partial x^k)_{x_t}$$

したがって

(3)

$$\nabla_t X = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{d\xi^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_i{}^k{}_j(x^1(t), \cdots, x^n(t)) \frac{dx^i}{dt} \xi^j(t) \right\} (\partial/\partial x^k)_{x_t}$$

となる．

さて，曲線 x_t に沿うベクトル場 X が曲線に沿って平行ならば当然 $\nabla_t X = 0$ となる．§3 の式 (2) を使うと，逆にすべての t に対して $\nabla_t X = 0$ であればその式で $\theta(X_t^*)$ は定ベクトルで，したがって X は曲線に沿って平行となる．

定理 2 曲線 x_t に沿うベクトル場 $X = X_t$ が平行であるための必要かつ十分な条件は $\nabla_t X = 0$ であることである．局所座標系に関しては X の成分 $\xi^k(t)$ が

$$\frac{d\xi^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_i{}^k{}_j(x^1(t), \cdots, x^n(t)) \frac{dx^i}{dt} \xi^j(t) = 0, \qquad 1 \leqq k \leqq n$$

をみたすことである．

ここで，次の定理をのべておこう．

定理 3 多様体 M に対して §3 の定理にある 4 条件をみたす写像

$$(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \nabla_Y X \in \mathfrak{X}(M)$$

が与えられていると，これを共変微分演算とする M の線形接続，すなわち $L(M)$ の接続が存在する．

［証明］ §3 の定理の証明のつぎにのべたように，与えられた写像から任意の開部分多様体 U に対して同様の写像

$$(X, Y) \in \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \nabla_Y X \in \mathfrak{X}(U)$$

が得られる．特に U が座標近傍で $\{x^1, \cdots, x^n\}$ が座標系であるとき，§4 の初めのように

$$\nabla_{\partial/\partial x^j}(\partial/\partial x^i) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_j{}^k{}_i(\partial/\partial x^k)$$

によってクリストッフェル記号 $\Gamma_j{}^k{}_i$ を定義することができる．これを使って $L(M)$ の接続形式を構成しよう．

そのために $\pi^{-1}(U) \subset L(M)$ における座標系

$$\{x^1, \cdots, x^n, a^1{}_1, \cdots, a^n{}_n\}$$

をとる．すなわち $u = (X_1, \cdots, X_n)$ が点 $x \in U$ での接 n 枠のとき $(x^1, \cdots, x^n)$ は x の座標，$(a^i{}_j)$ は

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} a^i{}_j(\partial/\partial x^i)$$

から定まる（第1章 §7 の (8) をみよ）．

$\pi^{-1}(U)$ の点 $u = (x^1, \cdots, x^n, a^1{}_1, \cdots, a^n{}_n)$ をとり，その点での水平部分空間がどのようであるべきかを考えてみる．そのために点 $x = \pi(u)$ における接ベクトル $X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(\partial/\partial x^i)$ の u における水平持ち上げ X^* を求める．X を接ベクトルとする曲線 $x_t = (\xi^1 t, \cdots, \xi^n t)$ をとり，点 u を始点とする水平持ち上げを u_t として

$$u_t = (X_1(t), \cdots, X_n(t)) \qquad \text{ここで} \qquad X_j(t) = \sum_{i=1}^{n} a^i{}_j(t)(\partial/\partial x^i)$$

とする．u_t が水平曲線であることと各ベクトル場 $X_j(t)$ が x_t に沿って平行であることとは同値であるから，式 (3) により

$$\frac{da^k{}_j}{dt} + \sum_{i,l=1}^{n} \Gamma_i{}^k{}_l \xi^i a^l{}_j = 0$$

特に，$t = 0$ として

$$\left(\frac{da^k{}_j}{dt}\right)_{t=0} = -\sum_{i,l=1}^{n} \Gamma_i{}^k{}_l(x^1, \cdots, x^n)\xi^i a^l{}_j$$

となる．したがって

$$(4) \qquad X^* = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \partial/\partial x^i + \sum_{k,j=1}^{n}\Bigl(-\sum_{i,l=1}^{n} \Gamma_i{}^k{}_l(x^1, \cdots, x^n)\xi^i a^l{}_j\Bigr)\partial/\partial a^k{}_j$$

を得る．(4) において $(\xi^1, \cdots, \xi^n) \in R^n$ を自由にとって得られる接ベクトル X^* の全体が点 u における水平部分空間になるはずである．

さて $GL(n, R)$ のリー環 $\mathfrak{gl}(n, R)$ で (k, j) 成分が 1 で他の成分がすべて 0 である行列を $E_k{}^j$ とかき，また $L(M)$ の局所座標の一部 $[a^i{}_j]$ の逆行列を $[b^i{}_j]$ とかくことにする．$\pi^{-1}(U)$ の上で

(5)　$$\omega^k{}_j = \sum_{m=1}^n b^k{}_m(da^m{}_j + \sum_{i,l=1}^n \Gamma_i{}^m{}_l(x^1, \cdots, x^n)a^l{}_j dx^i)$$

(6)　$$\omega = \sum_{j,k=1}^n \omega^k{}_j E_k{}^j$$

とおく．ω が $\pi^{-1}(U)$ の上の接続形式であること，さらに他の座標近傍を V としたとき $U \cap V$ ならば $\pi^{-1}(U \cap V)$ において同じ接続形式を得ることを確かめることができる．すなわちこれで $L(M)$ 上の接続形式 ω が定義されたことになる．さらに（5）が（4）の形の接ベクトルの上で0になることも明らかである．実際に ω から定まる線形接続のクリストッフェル記号が $\Gamma_i{}^k{}_j$ であること，すなわち共変微分演算が与えられた写像 $(X, Y) \to \nabla_Y X$ であることの詳しい証明は省略する．

これで，多様体の線形接続を論じるのに，$L(M)$ のこととその接続のことを一切忘れてしまって，M のベクトル場全体 $\mathfrak{X}(M)$ に関して定義することのできる演算

$$(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \nabla_Y X \in \mathfrak{X}(M)$$

で，§3 の定理の4条件をみたすもの自身を線形接続の定義と考えてもよいことがわかる．このような演算から出発しても，写像 $f: W \to M$ に沿う演算

$$\mathfrak{X}(W) \times \mathfrak{X}_f \to \mathfrak{X}_f$$

が定理1のように定義できること，特に曲線に沿う共変微分演算 $X \to \nabla_t X$ が定義できることは，もはや明らかであろう．したがって曲線 x_t に沿うベクトル場 $X = X_t$ は $\nabla_t X = 0$ であるときに曲線に沿って平行であると定義をすることができる．

次に，写像 f に沿う共変微分演算と M の捩率テンソル T，曲率テンソル R との関係は次のように与えられる．

定理 4　$S_1, S_2 \in \mathfrak{X}(W)$，$X \in \mathfrak{X}_f$ とすれば

1)　$$\nabla_{S_1} f_*(S_2) - \nabla_{S_2} f_*(S_1) - f_*([S_1, S_2]) = T(f_* S_1, f_* S_2)$$

2)　$$\nabla_{S_1}\nabla_{S_2} X - \nabla_{S_2}\nabla_{S_1} X - \nabla_{[S_1, S_2]} X = R(f_* S_1, f_* S_2) X$$

念のために記号を説明すると，$T(f_* S_1, f_* S_2)$ は

$$p \in W \to T_{f(p)}(f_*(S_1)_p,\ f_*(S_2)_p) \in T_{f(p)}(M)$$

という f に沿うベクトル場を表す．$R(f_* S_1, f_* S_2) X$ は

$$p \in W \to R_{f(p)}(f_*(S_1)_p,\ f_*(S_2)_p)X_p \in T_{f(p)}(M)$$

という f に沿うベクトル場を表している．

［証明］ ここでは 1) だけを証明しておこう． W の各点 p に対してその近傍 V で $f(V)$ が局所座標系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ をもつ近傍に含まれているような V 上で証明すれば十分である．このとき

$$f_*(S_1) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(\partial/\partial x^i \circ f), \qquad f_*(S_2) = \sum_{i=1}^{n} \psi^i(\partial/\partial x^i \circ f)$$

とかくと

$$\begin{aligned}(\nabla_{S_1} f_*(S_2))_p &= \sum_{i=1}^{n}(S_1\psi^i)_p(\partial/\partial x^i)_{f(p)} + \sum_{i=1}^{n}\psi^i(p)\nabla_{f_*(S_1)_p}\partial/\partial x^i \\ &= \sum_{i=1}^{n}(S_1\psi^i)_p(\partial/\partial x^i)_{f(p)} + \sum_{i,j=1}^{n}\psi^i(p)\varphi^j(p)\nabla_{(\partial/\partial x^j)_{f(p)}}\partial/\partial x^i \\ (\nabla_{S_2} f_*(S_1))_p &= \sum_{i=1}^{n}(S_2\varphi^i)_p(\partial/\partial x^i)_{f(p)} + \sum_{i=1}^{n}\varphi^i(p)\nabla_{f_*(S_2)_p}\partial/\partial x^i \\ &= \sum_{i=1}^{n}(S_2\varphi^i)_p(\partial/\partial x^i)_{f(p)} + \sum_{i,j=1}^{n}\varphi^i(p)\psi^j(p)\nabla_{(\partial/\partial x^j)_{f(p)}}\partial/\partial x^i\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}(f_*([S_1, S_2]_p))(x^k) &= [S_1, S_2]_p(x^k \circ f) \\ &= (S_1)_p(S_2(x^k \circ f)) - (S_2)_p(S_1(x^k \circ f)) \\ &= (S_1)_p((f_*S_2)x^k) - (S_2)_p((f_*S_1)x^k) \\ &= (S_1)_p(\psi^k) - (S_2)_p(\varphi^k)\end{aligned}$$

だから

$$f_*([S_1, S_2]_p) = \sum_{i=1}^{n}(S_1\varphi^i)_p(\partial/\partial x^i)_{f(p)} - \sum_{i=1}^{n}(S_2\varphi^i)_p(\partial/\partial x^i)_{f(p)}$$

したがって

$$\begin{aligned}&(\nabla_{S_1} f_*(S_2))_p - (\nabla_{S_2} f_*(S_1))_p - f_*([S_1, S_2]_p) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}(\psi^i(p)\varphi^j(p) - \varphi^i(p)\psi^j(p))\nabla_{(\partial/\partial x^j)_{f(p)}}\partial/\partial x^i \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\varphi^i(p)\psi^j(p)(\nabla_{(\partial/\partial x^i)_{f(p)}}\partial/\partial x^j - \nabla_{(\partial/\partial x^j)_{f(p)}}\partial/\partial x^i) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\varphi^i(p)\psi^j(p)T_{f(p)}(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) \\ &= T_{f(p)}(\sum_{i=1}^{n}\varphi^i(p)\partial/\partial x^i,\ \sum_{j=1}^{n}\psi^j(p)\partial/\partial x^j)\end{aligned}$$

$$= T_{f(p)}(f_*S_1, f_*S_2)$$

これで 1) が証明された.

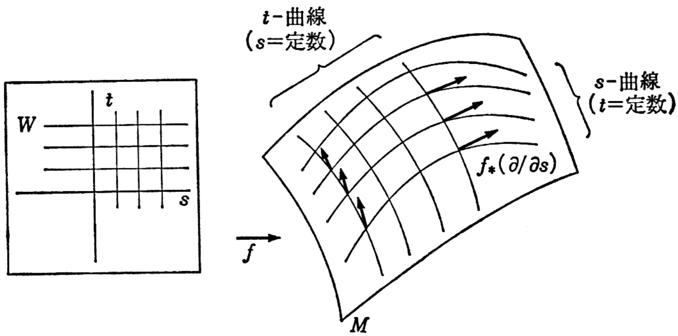
問　上の定理の 2) を証明せよ.

定理4の直観的な意味づけとして M の線形接続の捩率テンソル T が 0 である場合を考えよう. 簡単のために R^2 の領域 W から M への微分可能写像

$$(s,t) \in W \to f(s,t) \in M$$

が与えられているとしよう. 座標系 $\{s,t\}$ に関するベクトル場 $\partial/\partial s, \partial/\partial t$ に対して 1) から

$$\nabla_{\partial/\partial s} f_*(\partial/\partial t) = \nabla_{\partial/\partial t} f_*(\partial/\partial s)$$



3-5 図

が成り立つことがわかる (3-5 図).

M が特に直線 R であるときは, $f_*(\partial/\partial t)$ は $\partial f/\partial t$ と, $\nabla_{\partial/\partial s} f_*(\partial/\partial t)$ は $(\partial/\partial s)(\partial f/\partial t)$ と同一視してもよいから, 上の式は

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)$$

という微分学での基本事実を拡張したものになっているといえよう.

問　M の曲率テンソルが 0 のとき, 上の写像 $(s,t) \in W \to f(s,t) \in M$ に沿うベクトル場 X に対して

$$\nabla_s \nabla_t X = \nabla_t \nabla_s X$$

であることを示せ. ここで ∇_t は $\nabla_{\partial/\partial t}$, ∇_s は $\nabla_{\partial/\partial s}$ を表す.

注意　定理4は §5 の捩率テンソル, 曲率テンソルの定義そのものの拡張になってい

る．$f: W \to M$ によってひきおこされる主ファイバー束 $f^{-1}(L(M))$ とそこに定まる接続（第2章 §5）という考えを使って，f に沿う共変微分演算を定義し，また定理4を導くこともできる．これは演習問題としておこう．

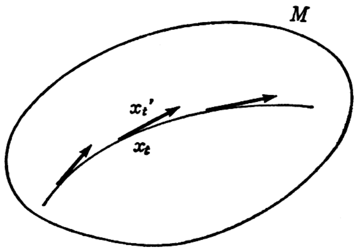
§8. 測地線

線形接続が与えられたとき，測地線（geodesic）を定義しよう．これはアファイン空間の直線を拡張した概念である．

$-\infty \leqq a < b \leqq \infty$ として開区間 (a,b) の上で定義された曲線 x_t が **測地線** であるとは，その接ベクトル場 $x_t' \neq 0$ が曲線自身に沿って平行であること，すなわち

$$(1) \qquad \nabla_t x_t' = 0 \qquad (\text{すべての } t \text{ において})$$

が成り立つことである．便宜上，測地線 x_t を (a, b) の任意の閉区間に制限した曲線も測地線ということにする（3-6 図）．



3-6 図

この定義において曲線の助変数 t のとり方は重要である．いま x_t が (1) を満足するとして，他の助変数 s をとったとする．すなわち $s = s(t)$ は (a, b) で定義された微分可能関数で $ds/dt > 0$，したがってある開区間 (c, d) で定義された逆関数 $t = t(s)$ が存在するとしよう．このとき

$$(2) \qquad \nabla_s x_s' = \frac{d^2t}{ds^2} x_t' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \nabla_t x_t'$$

が得られる．もし助変数 s についても $\nabla_s x_s' = 0$ がすべての s に対し成り立つとすると (1), (2) から

$$\frac{d^2t}{ds^2} = 0 \qquad \text{すなわち} \qquad t = \alpha s + \beta \quad (\alpha > 0, \beta \text{ は定数})$$

という関係が得られる．したがって (1) を成立させるような助変数はアファイン変換を除いて一意的にきまる訳である．このような助変数を測地線の **アファイン助変数**（affine parameter）とよぶ．

問　式 (2) を導け．

いま $\nabla_t x_t'=0$ として，一般の助変数 $s=s(t)$ を考えると (2) から $\nabla_s x_s'=\varphi(s)x_s'$，ここで $\varphi(s)=(d^2t/ds^2)/(dt/ds)$ となる．逆にある関数 $\varphi=\varphi(s)$ に対して

$$\nabla_s x_s'=\varphi(s)x_s' \tag{3}$$

という方程式を満足するような曲線 $s\to x_s$ があるとしよう．このとき新しい助変数 $t=t(s)$ を適当に選んで (1) が成り立つようにできる．そのためには

$$\frac{d}{ds}\log\left(\frac{dt}{ds}\right)=\varphi(s)$$

をみたすような $t=t(s)$ をとれば，(2) から $\nabla_t x_t'=0$ となることがわかる．したがって

$$t=\int e^{\int\varphi(s)ds}ds$$

とすればよい．これをまとめて

定理 1 曲線 x_s が助変数 s を適当にとりかえることによって測地線になるための必要かつ十分な条件は，ある関数 $\varphi(s)$ に対して (3) が成り立つことである．このとき，アファイン助変数 t はアファイン変換を除いて一意的にきまる．

局所座標系 $\{x^1,\cdots,x^n\}$ に関してアファイン助変数 t をもつ測地線 $x_t=(x^1(t),\cdots,x^n(t))$ がみたすべき微分方程式は，§7 の定理 2 により

$$\frac{d^2x^k}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_i{}^k{}_j(x^1(t),\cdots,x^n(t))\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}=0,\qquad 1\leqq k\leqq n \tag{4}$$

である．

2 階常微分方程式に関してよく知られている存在定理から，任意の

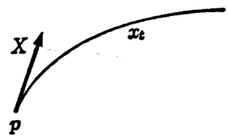
$$(p^1,\cdots,p^n),\quad (a^1,\cdots,a^n)$$

に対してある $\delta>0$ と $|t|<\delta$ で定義された解 $(u^1(t),\cdots,u^n(t))$ で，初期条件

$$x^i(0)=p^i,\qquad \left(\frac{dx^i}{dt}\right)_{t=0}=a^i$$

をみたすものが一意的に存在する．すなわち M の任意の点 p と p での任意の

接ベクトル X に対して $x_0=p$, $x_0'=X$ となる測地線 x_t ($|t|<\delta$) が一意的に存在する．ここで一意的というのは，x_t ($|t|<\delta_1$) および y_t ($|t|<\delta_2$) が同じ初期条件 (p, X) をもつ測地線ならば $x_t=y_t$ ($|t|<\mathrm{Min}\,\{\delta_1, \delta_2\}$) ということである．また初期条件によってアファイン助変数が一意的に定まることも明らかである (3-7図).



3-7 図

定理 2　M が線形接続をもつとき，任意の $p\in M$ と任意の $X\in T_p(M)$ に対して初期条件 $x_0=p, x_0'=X$ をみたす測地線 x_t ($|t|<\delta$ (ここで δ は適当な正数)) が一意的に存在し，そのアファイン助変数 t も一意に定まる．

アファイン助変数 t をもつ測地線 x_t が **完備** (complete) というのはそれが $-\infty<t<\infty$ に対して定義されていることである．M の線形接続が **完備** (正確には **測地線完備**) というのは，任意の測地線 u_t が完備な測地線に拡張できることである．

完備でない線形接続の例としては，もちろんある与えられた線形接続をもつ多様体 M から1点 p_0 を除いて $M-(p_0)$ に自然に定まる線形接続を考えればよいわけであるが，このような例は人工的で面白くないといえるから次の例をとろう．

例　直線 R^1 の座標を x とし，ベクトル場 d/dx を X で表す．$\nabla_X X=X$ となるような線形接続が一意的にきまる．そのクリストッフェル記号は $\Gamma_1{}^1{}_1=1$ である．測地線の方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0$$

$t=0$ のとき $x=0$, $dx/dt=1$ という初期条件をもつ解は $x(t)=\log(1+t)$ である．この解の存在範囲は $-1<t<\infty$ であるからこの測地線は完備でない．

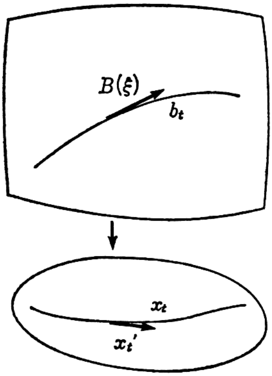
問　上の例にならって R^2 の完備でない線形接続の例を作れ．

ここで測地線を接 n 枠束 $P=L(M)$ の立場から次のようにとり扱うことができることをのべておこう．

定理 3 Pの任意の基底ベクトル場 $B(\xi)$ の積分曲線 b_t の射影 $x_t=\pi(b_t)$ は M の測地線であり，逆に M の任意の測地線はこのようにして得られる.

[証明] 曲線 x_t の接ベクトル x_t' について

$$x_t'=\pi(b_t')=\pi(B(\xi)_{b_t})=b_t\cdot\xi$$



3-8 図

となり，b_t は x_t の水平持ち上げだからこの式は x_t' が曲線 x_t に沿って平行であることを示している．したがって x_t は測地線である．逆に x_t が，たとえば 0 を含む開区間で定義された測地線であるとする．$\pi(b_0)=x_0$ となるPの点 b_0 をとり $\xi=b_0^{-1}\cdot x_0'\in R^n$ とする．x_t の b_0 からでる水平持ち上げを b_t とすると，x_t が測地線であることから $x_t'=b_t\xi$ となる．したがって $\theta(b_t')=b_t^{-1}(\pi(b_t'))=b_t^{-1}(x_t')=\xi$ となり，このことは b_t が $B(\xi)$ の積分曲線であることを示している (3-8 図).

§ 9. 標準座標系

M の線形接続に対して指数写像を定義しよう.

M の任意の点 p をとる．$T_p(M)$ の各元 X に対して (p,X) を初期条件とする測地線 x_t を $\operatorname{Exp} tX$ というように表すとして，これはある開区間 $-\delta_1<t<\delta_2$ $(\delta_1,\delta_2>0)$ で定義されている．線形接続が完備のときは開区間は $(-\infty,\infty)$ となるから $t=1$ として $\operatorname{Exp} X\in M$ が定義できる．完備でないときには，§8 定理 2 に用いた存在定理をもう少し精密な形で使うことによって，$T_p(M)$ の中で 0 のある近傍 N_p があり，各 $X\in N_p$ に対しては $\operatorname{Exp} tX$ が $[-1,1]$ を含む開区間の上で定義されていると考えてよい．このとき

$$X\in N_p\to\operatorname{Exp} X\in M$$

を **p における指数写像** (exponential mapping at p) とよぶ.

この指数写像 Exp が N_p の上で微分可能であることも，微分方程式の解が初期条件に微分可能に依存するという事実から導かれる.

問 この事実の詳細を調べよ.

点pにおける接n枠 $(X_1, \cdots, X_n)$ を一つきめるとこれにより $T_p(M)$ の座標系がきまる．指数写像 Exp の $0 \in T_p(M)$ における微分写像は，$T_0(T_p(M))$ を自然に $T_p(M)$ と同一視したとき恒等写像となる．このことから 0 の近傍をさらに小さくとると，Exp はそれからpのBにおける近傍の上への微分同相を与えると考えてもよい．あらためて N_p が 0 のそのような近傍でかつ

$$N_p = \{ \sum_{i=1}^{n} a^i X_i;\ |a^i| < \delta \}, \qquad \delta > 0$$

という形になっているようなものをとり，$U_p = \mathrm{Exp}\,(N_p)$ とすると U_p の上の局所座標系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ として

$$(1) \qquad x^i(\mathrm{Exp}\,(\sum_{i=1}^{n} a^i X_i)) = a^i, \qquad 1 \leqq i \leqq n$$

となるものがとれることになる．これを接 n 枠 $\{X_1, \cdots, X_n\}$ に対応する**標準座標系** (normal coordinate system) とよび，U_p を p の**標準近傍** (normal neighborhood) とよぶ．

標準座標系に関してpを始点とする測地線は

$$(2) \qquad x^i = a^i t, \qquad 1 \leqq i \leqq n$$

という形の方程式で表せることになることは (1) から明らかであろう．

$\{x^1, \cdots, x^n\}$ に関するクリストッフェル記号を $\Gamma_i{}^k{}_j$ とすると (2) が方程式

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_i{}^k{}_j(x^1(t), \cdots, x^n(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0$$

を満足することから

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_i{}^k{}_j(a^1 t, \cdots, a^n t) a^i a^j = 0$$

$t = 0$ とおいて

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_i{}^k{}_j(0, \cdots, 0) a^i a^j = 0$$

これが任意の $(a^1, \cdots, a^n)$ に対して成り立つことから

$$\Gamma_i{}^k{}_j + \Gamma_j{}^k{}_i = 0$$

が点pにおいて成り立つことがわかる．

捩率テンソル $T = 0$ のとき $\Gamma_i{}^k{}_j = \Gamma_j{}^k{}_i$ と上の式から $\Gamma_i{}^k{}_j = 0$ が標準座標系の原点pで成り立つことがわかる．したがって

定理 M の線形接続の捩率テンソルが0であるとする．p を原点とする標準座標系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ に関して p において $\Gamma_i{}^k{}_j = 0$ である．したがって任意のテンソル場 K に対して p において

$$K^{i_1 \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots j_s;k} = \frac{\partial K^{i_1 \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots j_s}}{\partial x^k}$$

が成り立つ．

与えられた線形接続 Γ の捩率テンソル T が0でないとき，Γ の共変微分演算 $\nabla_X Y$ を変形して

$$\nabla_X{}^* Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2} T(X, Y)$$

とすると ∇^* はある線形接続 Γ^* の共変微分演算になっていることがわかる．いま x_t がアファイン助変数 t の Γ に関する測地線とすれば

$$\nabla_t x_t' = 0$$

これから

$$\nabla_t{}^* x_t' = 0$$

となり，したがって x_t は Γ^* に対する測地線でもある．ゆえに Γ と Γ^* とはアファイン助変数も含めて同じ測地線をもっている．一方，∇^* の捩率テンソルは0であることがわかる．

問 局所座標系に関して Γ のクリストッフェル記号が $\{\Gamma_i{}^k{}_j\}$ であるとき，Γ^* のクリストッフェル記号は次式で与えられることを示せ．

$$\Gamma^*{}_i{}^k{}_j = \frac{1}{2}(\Gamma_i{}^k{}_j + \Gamma_j{}^k{}_i)$$

§10. 曲線の展開と全完備性

多様体 M に線形接続が与えられたとき，点 x_0 から x_1 への曲線 τ に沿う平行移動は接ベクトル空間 $T_{x_0}(M)$ から $T_{x_1}(M)$ への線形写像であるが，これらをベクトル空間でなくアファイン空間と考えたときに，τ に沿うアファイン写像を定義しようというのがエリー・カルタン (Elie Cartan) によるアファイン接続幾何の考えなのである．

接ベクトル空間 $T_x(M)$ をアファイン空間と考えるということは，M の接

n 枠束 $L(M)$ の構造群 $GL(n,R)$ をアファイン変換群 $A(n)$, すなわち

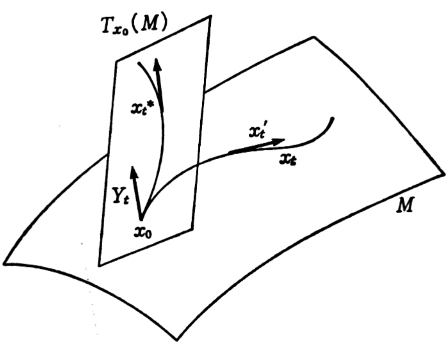
$$\begin{bmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A \in GL(n,R),\ a \in R^n$$

という形の $(n+1)$ 次行列全体の群に拡大して得られる主ファイバー束を考えることにつながる．この主ファイバー束の適当な接続が M のアファイン的接続を与えることになる．本書ではそのような理論はとり扱わないで，すでにのべた線形接続の立場に基づいてまず曲線の接空間への展開という概念を定義し，それを使ってアファイン的平行移動を導きだすことにしよう．さらに曲線の展開を使って全完備性といわれる性質を定義する．

多様体 M に線形接続が与えられているとしよう．曲線 $\tau=\{x_t; 0\leqq t\leqq b\}$ が与えられているとき，τ の接空間 $T_{x_0}(M)$ への **展開** (development) を定義しよう．まず τ が微分可能であるときを考える．§3 でのように x_t から x_0 への逆の向きをもつ曲線の部分に沿う平行移動 ${\tau^t}_0$ は $T_{x_t}(M)$ から $T_{x_0}(M)$ への線形写像である．ここで

$$Y_t={\tau^t}_0(x_t'), \qquad 0\leqq t\leqq b$$

とおく．さて $T_{x_0}(M)$ をアファイン空間と考えて 0 (すなわち 0 ベクトル) を始点とする曲線 x_t^* $(0\leqq t\leqq b)$ で各点での接ベクトルが Y_t にアファイン空間 $T_{x_0}(M)$ の中で平行になっているようなものとする．それは



3-9 図

$$x_t^*=\int_0^t Y_s ds$$

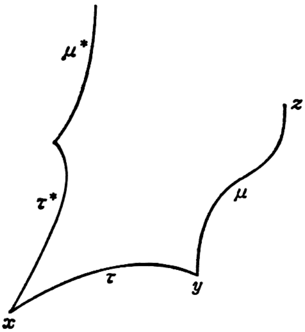
によって一意的に定まる．この曲線 $\tau^*=\{x_t^*; 0\leqq t\leqq b\}$ を τ の $T_{x_0}(M)$ への **展開** とよぶ (3-9 図)．

特別の場合として，τ が測地線 $(\nabla_t x_t'=0)$ であるときは Y_t は定ベクトル $Y=x_0'$ に等しいから，τ^* は

$$x_t^* = tY, \qquad 0 \leqq t \leqq b$$

すなわち $T_{x_0}(M)$ の線分に他ならない．

問　逆に曲線 τ の展開 τ^* が線分であれば，τ は測地線であることを示せ．

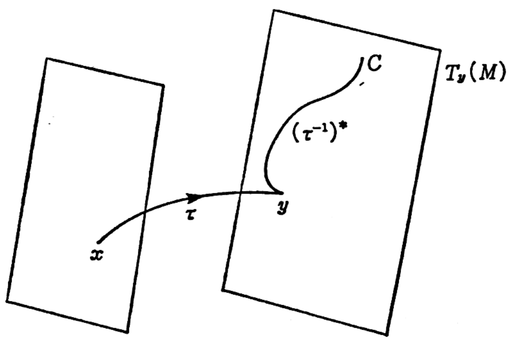


3-10 図

次に τ が区分的に微分可能である場合は，上のような展開の定義が拡張できる．たとえば，τ が x から y への微分可能曲線，$\mu=(y_t)$ が y から z への微分可能曲線であるとき，$\nu=\mu\cdot\tau$ をその2曲線の合成とする．τ の展開を τ^* とする．μ の各点 y_t での接ベクトルを μ の逆向きに y_t から y まで，さらにひきつづいて τ^{-1} に沿って $T_x(M)$ まで平行移動して得られるベクトルを Z_t とする．τ^* の終点を始点として Z_t を積分して得られる $T_x(M)$ 内の曲線を μ^* とすれば，$\nu=\mu\cdot\tau$ の $T_x(M)$ への展開はちょうど $\mu^*\cdot\tau^*$ になることは明らかであろう（3-10 図）．

問　上の事実を確かめよ．

さて，τ を x から y への曲線とし τ に沿うアファイン的平行移動を定義しよう．τ^{-1} を τ の逆曲線とするとき，その $T_y(M)$ への展開として得られる曲線の終点を C とする．すなわち C はアファイン空間 $T_y(M)$ の点である．さて τ に沿う**アファイン的平行移動** (affine parallel displacement) $\tilde{\tau}$ はアファイン空間 $T_x(M)$ から $T_y(M)$ へのアファイン変換で，$T_x(M)$ の与えられた点 X に対し（線形）平行移動 τ を行い，その結果 $\tau(X)$ に C を加えて得られるベクトルで与えられる $T_y(M)$ の点を Y とし，$\tilde{\tau}(X)=Y$ によって得られ



3-11 図

る (3-11 図).

アファイン的平行移動についてはこれ以上立ち入らないでおく. ついでながら, 本書で多様体の線形接続とよんでいるものをアファイン接続とよぶこともしばしばあるのでそのことを注意しておこう. この慣例による意味でのアファイン接続 (affine connection) は線形接続と全く同義語である. さて曲線の展開に話をもどそう.

M の曲線 $\tau: x_t$ $(0 \leqq t \leqq b)$ の $T_{x_0}(M)$ への展開 τ^* は同じ定義域 $[0, b]$ をもっているが, 逆に $T_x(M)$ の 0 を始点とする曲線 $\tau^*: x_t^*$ $(0 \leqq t \leqq b)$ が与えられているとする. このとき点 x を始点とする M の曲線 τ で, その展開が τ またはその一部分になっているようなものが存在するであろうか? 一般にいえるのは次のことである.

定 理 $T_x(M)$ の 0 を始点とする曲線 $\tau^* = \{x_t^*; 0 \leqq t \leqq b\}$ が与えられたとき, ある正数 δ と区間 $[0, \delta]$ の上で定義された M の曲線 x_t $(0 \leqq t \leqq \delta)$ で, $x_0 = x$ かつその $T_x(M)$ への展開が x_t^* $(0 \leqq t \leqq \delta)$ と一致するものが一意的に存在する.

[**証明**] M の接 n 枠束 $P = L(M)$ を用いて §8 の定理 3 の証明を一般化した方法によって証明しよう. $\pi(u) = x$ となる P の点 u をとり, 与えられた $T_x(M)$ の曲線 x_t^* に対して R^n の曲線 $u^{-1}x_t^*$ $(0 \leqq t \leqq b)$ をとり, その接ベクトルを ξ_t とする. すなわち

$$\xi_t = \frac{d(u^{-1}x_t^*)}{dt} = u^{-1}\left(\frac{dx_t^*}{dt}\right)$$

各 ξ_t に対応する基底ベクトル場 $B(\xi_t)$ をとり, u を始点とする $B(\xi_t)$ の積分曲線 u_t を考えよう. ここで u_t はある $\delta > 0$ に対して区間 $[0, \delta]$ で定義され

$$u_t' = (B(\xi_t))_{u_t}, \qquad u_0 = u$$

を満足する曲線であって, その存在は微分方程式の存在定理から保証される. このとき $x_t = \pi(u_t)$ とすると

$$x_t' = \pi(u_t') = u_t\xi_t = u_t u_0^{-1}\left(\frac{dx_t^*}{dt}\right)$$

となる. u_t は水平曲線だから, この式は x_t' を x_0 まで平行移動したとき $\tau_t^{-1}(x_t') = dx_t^*/dt$ となることを示している. したがって曲線 $x_t (0 \leqq t \leqq \delta)$ の $T_x(M)$ へ

の展開が x_t^* $(0 \leqq t \leqq \delta)$ であることがわかる．

次にこのような曲線の一意性を証明するために，y_t $(0 \leqq t \leqq \delta)$ も x_t^* に展開されるとしよう．u_0 を始点とする y_t の水平持ち上げを v_t $(0 \leqq t \leqq \delta,\ v_0 = u_0)$ とすると v_t もまた $B(\xi_t)$ の積分曲線であることがわかる．積分曲線の一意性から $v_t = u_t$ したがって $y_t = x_t$ $(0 \leqq t \leqq \delta)$ が成り立つ．

この定理で M の曲線 x_t の存在範囲が $[0, b]$ までとれるとは限らない．たとえば $\tau^* = \{x_t^*;\ 0 \leqq t \leqq b\}$ が線分ならば x_t は測地線であるが，それが $[0, b]$ で定義されているとは限らない（たとえば M から x_b にあたるはずの点が欠けていることがあり得る）．

ここで多様体 M に与えられた線形接続が**全完備**（totally complete）あるいは**エーレスマンの意味で完備**（complete in the sense of Ehresmann）であるというのは次の条件がみたされていることであると定義する．すなわち M の任意の点 x と $T_x(M)$ の 0 を始点とする任意の曲線 $\tau^* = \{x_t^*; 0 \leqq t \leqq b\}$ に対して，x を始点とする M の曲線 $\tau = \{x_t;\ 0 \leqq t \leqq b\}$ でその展開が τ^* と一致するものが存在する．

全完備ならば §8 で定義した測地線の意味で完備であることはほとんど明らかであろう．

問　この事実を証明せよ．

逆に，測地線の意味で完備であれば全完備であるかという問題は永らく未解決であったが，近年になって否定的な答が与えられた．これは一般相対性理論において時空の特異点（singularity）の問題が，ローレンツ計量のレビ・チビタ接続（第5章 §2）の完備性と関連していろいろ研究されたために得られた結果の一つであるといえる．それに関したことは第5章で少しのべるが，ここでは（測地線の意味で）完備な線形接続で全完備でないものの例をあげておこう（B. Wettstein, Congruence and existence of differentiable maps, ETH（スイス工科大学）学位論文，1978，による）．

$\{u, v\}$ を R^2 のアファイン座標系とし，それに関して

$$\begin{cases} \Gamma_1{}^2{}_2(u, v) = -2e^v, \qquad \Gamma_2{}^2{}_1(u, v) = 2e^v \\ \text{他の } \Gamma_i{}^k{}_j = 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} \nabla_{\partial/\partial u}\partial/\partial v = -2e^v\partial/\partial v, & \nabla_{\partial/\partial v}\partial/\partial u = 2e^v\partial/\partial v \\ \nabla_{\partial/\partial u}\partial/\partial u = \nabla_{\partial/\partial v}\partial/\partial v = 0 \end{cases}$$

によって定まる線形接続を考えよう． $\Gamma^*{}_i{}^k{}_j = (\Gamma_i{}^k{}_j + \Gamma_j{}^k{}_i)/2$ を作ってみると $\Gamma^*{}_i{}^k{}_j = 0$ だからこれは R^2 の普通の平坦な線形接続をきめている．一般に $\{\Gamma_i{}^k{}_j\}$ できまる接続は $\{\Gamma^*{}_i{}^k{}_j\}$ できまる接続と同じ測地線（アファイン助変数も含めて）をもつ（§9の最後参照）から，我々の R^2 の線形接続が測地線の意味で完備であることがわかる．

いま $p=(0,0)$ を始点とする曲線 τ：

$$(u(t), v(t)) = (t, -\log(1-t)), \qquad 0 \leqq t < 1$$

を考える．これが $t=1$ まで延長できないことは $t\to 1$ のとき $v(t)\to\infty$ からわかる．この曲線の p の接空間への展開を求めよう．$0<r<1$ をきめて曲線の接ベクトル

$$\left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right)_{t=r} = \left(1, \frac{1}{1-r}\right)$$

を曲線に沿って $p=(0,0)$ まで平行移動して得られる接ベクトル $Y(r)$ を見出すために，いま $(U(t), V(t))$ が τ に沿って平行で $U(r)=1$, $V(r)=1/(1-r)$ となるベクトル場であるとすると

$$\frac{dU}{dt} = 0 \qquad \text{したがって} \qquad U = 1$$

$$\frac{dV}{dt} + \Gamma_1{}^2{}_2 V + \Gamma_2{}^2{}_1 \frac{1}{1-t} = 0$$

すなわち

$$\frac{dV}{dt} - \frac{2}{1-t}V + \frac{2}{1-t}\frac{1}{1-t} = 0$$

となる．これから

$$V(t) = \frac{1+r-2t}{(1-t)^2}$$

ゆえに $Y(r) = (U(0), V(0)) = (1, 1+r)$ となる．曲線 τ の展開 τ^* は $Y(t)$ を積分して

$$(u^*(t), v^*(t)) = \left(t, t+\frac{t^2}{2}\right)$$

として得られる．この曲線 τ^* はもちろん $t=1$ まで（実際すべての t に対して）定義されているが，$t=1$ まで含めた τ^* に展開される R^2 の曲線は存在しない．なぜならば，もしそのような曲線が存在すれば $0 \leqq t < 1$ においては τ に一致しなければならず，τ は $t=1$ まで延長できないからである．これで我々の線形接続が全完備でないことがわかった．

第4章 §8 で，リーマン多様体に対しては測地線完備であれば全完備であることを証明する．

問　Gをリー群とする．左不変ベクトル場の作るGのリー環 $\mathfrak{g}$ の基 $\{X_1, \cdots, X_n\}$ を一つきめるとGからその接n枠束 $L(G)$ への切り口σが

$$\sigma(g) = ((X_1)_g, \cdots, (X_n)_g), \qquad g \in G$$

によって定まる．任意のGの曲線 g_t に対して $\sigma(g_t)$ がその水平もち上げであるような G の線形接続が一意的に定まることを示せ．この接続の共変微分演算は，Y が左不変ベクトル場ならば任意のベクトル X に対して $\nabla_X Y = 0$ をみたすことを示せ．また G の単位元からでる曲線 g_t に対してその接空間 $T_e(G)$ への展開は，まず

$$Y_t = g_t^{-1} \cdot g_t'$$

とおき，この Y_t を $0 \in T_e(G)$ を初期条件として $T_e(G)$ 内で積分することによって得られる．このことから考えている線形接続が全完備であることを示せ（第2章 §2 の定理2参照）．

問　上の問において左不変でなく右不変ベクトル場を考えても同様の結果が成り立つことを確かめよ（このときは $Y_t = g_t' g_t^{-1}$ で第2章 §2 の定理2と全く同じ微分方程式になる）．

4 リーマン幾何学

この章では，リーマン計量とそれから一意的に定まるレビ・チビタ接続とよばれる線形接続の基本的な性質をのべ，さらに曲率テンソルからリッチ・テンソル，スカラー曲率，断面曲率などを定義する．超曲面の幾何の基本事実を使って，定曲率空間の標準モデルを定義する．つづいて曲線の長さの変分とヤコビ場，そしてその応用をのべる．距離関数と完備性との関連をのべ，特に測地線完備なリーマン多様体はエーレスマンの意味でも完備であることを証明する．計量の共形変形，共形ワイル・テンソルを論じ，最後に部分多様体の幾何の例として回転群 $SO(n)$ の幾何を論じる．

§1. リーマン計量とその接続

n 次元多様体 M にリーマン計量 g が与えられているとしよう．各点 p の接空間 $T_p(M)$ には g からきまる正値内積 $g_p(X, Y)$ が存在することになる．このとき，M の線形接続が**計量的** (metric) であるとは $\nabla g = 0$ すなわちすべてのベクトル場 X, Y, Z に対して

(1) $(\nabla_X g)(Y, Z) \equiv X \cdot g(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$

となることである．テンソル場の共変微分がテンソルの平行移動を用いた微分であること（第3章 §3）を考えると，(1) の条件は幾何学的な次の条件と同値である．すなわち x から y への曲線 τ に沿う平行移動が g に関して等長的，すなわちすべての $X, Y \in T_x(M)$ に対して

$$(1') \qquad g_x(X, Y) = g_y(\tau X, \tau Y)$$

が成り立つ．

このような線形接続は，M の g に関する正規直交接 n 枠全体の作る束 $O(M)$ — その構造群は $O(n)$ であるが — の任意の接続から得ることができる．したがって g に関する計量的な線形接続はたくさんある．その中で，捩率テンソルが 0 になるようなものが，一意的に存在することを証明しよう．その線形

接続をgの**レビ・チビタ接続** (Levi-Civita connection) または**リーマン接続** (Riemannian connection) とよぶ.

定理 多様体 M 上のリーマン計量gに対し, 計量的 ($\nabla g=0$) でかつ捩率テンソルが0に等しい線形接続が一意的に存在する.

注意 計量gが正値でなく不定値の場合にもこの定理は(下の証明と共に)成り立つ. 第5章でgがローレンツ計量のときにこの定理をくり返してのべる.

上の定理の証明を二通り与える.

[証明 1] 計量的な線形接続 ∇ がとにかく存在するから, それを変更して計量的でかつ捩率テンソルが0であるような線形接続 ∇^* を構成しよう. ∇^* があるとして

$$D(X,Y)=\nabla^*{}_XY-\nabla_XY$$

とするとDは (1,2) 型のテンソル場である. ∇, ∇^* の両方が方程式 (1) をみたすから, その差をとることによって

$$g(D(X,Y),Z)+g(Y,D(X,Z))=0 \tag{2}$$

を得る. X,Y,Z をとりかえて

$$g(D(Y,Z),X)+g(Z,D(Y,X))=0 \tag{2'}$$

$$g(D(Z,X),Y)+g(X,D(Z,Y))=0 \tag{2''}$$

を得る. 一方, ∇ の捩率テンソルを T とすると

$$\nabla^*{}_XY-\nabla^*{}_YX-[X,Y]=T(X,Y)+D(X,Y)-D(Y,X)$$

であるから, ∇^* の捩率テンソルが0という条件から

$$D(X,Y)-D(Y,X)=-T(X,Y) \tag{3}$$

が成り立つということになる. (2)+(2′)−(2″) を作って (3) を使うと

$$g(D(X,Y),Z)=\frac{1}{2}\{g(T(Y,Z),X)+g(T(X,Z),Y)-g(T(X,Y),Z)\} \tag{4}$$

が得られる. この式の右辺は ∇ の捩率テンソル T できまるから, (4) がすべての Z に対して成り立つという条件により, $D(X,Y)$ が与えられた X, Y に対してきまる. 右辺が Y,Z に関して歪対称であるから, (2) が成り立つことがわかる. また (4) から (3) の成り立つこともわかる. いいかえれば, (4) によってDを定義すると, $\nabla^*{}_XY=\nabla_XY+D(X,Y)$ で与えられる線形接続 ∇^* が計量的かつ捩率テンソル 0 という性質をもつことがわかる. そのような接続の一意性を示すために, ∇ と ∇^* が両方ともその二つの性質をもっているとすると, その差 $D(X,Y)=\nabla^*{}_XY-\nabla_XY$ は最初に示したように方程式 (4) をみたすが, いまの場合 $T=0$ であるから $D(X,Y)=0$ がすべての

X, Y に対して成り立つことになり，結局 $\nabla^* = \nabla$ であることがわかる．

［証明 2］ ベクトル場 X, Y が与えられたとき

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) - g(X, [Y, Z]) \tag{5}$$

がすべてのベクトル場 Z に対して成り立つという条件によって $\nabla_X Y$ というベクトル場を定義する（これが可能なことは (4) のときも同様であるが，g が各点で非退化ということに基づいている）．このようにして得られる写像 $(X, Y) \to \nabla_X Y$ が共変微分演算の性質（第3章 §3 の定理）をみたしていることを確かめることは，少々手間がかかるだけでやさしいことである．この線形接続の振率テンソルが 0 になることも容易にわかる．計量的であることを示すために (5) とそこで Y, Z を入れかえた式とを加えると右辺は $2Xg(Y, Z)$ だけ残るから

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = Xg(Y, Z)$$

すなわち $\nabla_X g = 0$ となる．

一意性を示すためには，$\nabla_X g = 0$ と $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ をみたす ∇ は必然的に (5) をみたさなければならないことから明らかである．

問　上の議論で (5) の成り立つことを確かめよ．

$\{x^1, \cdots, x^n\}$ が近傍 U における座標系とすると，リーマン計量の成分は

$$g_{ij} = g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) \tag{6}$$

によって与えられる．レビ・チビタ接続のクリストッフェル記号を求めるために，(5) において $X = \partial/\partial x^i$，$Y = \partial/\partial x^j$，$Z = \partial/\partial x^k$ とおくと

$$2\sum_{m=1}^{n} \Gamma_i{}^m{}_j g_{mk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \tag{7}$$

となる．ここで行列 $[g_{ij}]$ の逆行列の成分を $[g^{ij}]$ とかく．すなわち

$$\sum_{k=1}^{n} g^{ik} g_{kj} = \delta^i{}_j \tag{8}$$

これを用いて (7) の両辺に g^{lk} を掛けて k についての和をとることによって

$$\Gamma_i{}^l{}_j = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \tag{9}$$

を得る．

ここで，上に現れる $[g^{ij}]$ が実は (2,0) 型のテンソル場の $\{x^1, \cdots, x^n\}$ に

関する成分であることを示そう．まず，リーマン計量gによって各点の接空間$T_x(M)$とその双対空間$T_x{}^*(M)$との間の同形対応が定まることに注意しよう．そのために，各$X\in T_x(M)$に対して$\alpha=\phi(X)\in T_x{}^*(M)$を

$$\alpha(Z)=g(X,Z),\qquad Z\in T_x(M)$$

によって定める．逆に$\alpha\in T_x{}^*(M)$が与えられたとき，$\phi(X)=\alpha$となるXが一意的に存在することも線形代数でよく知られていることである（たとえば，本選書 12，野水克己（矢野 訳）：線形代数の基礎（下），定理 8.10）．

いま，座標系$\{x^1,\cdots,x^n\}$に関して$X=\partial/\partial x^j$として$\alpha=\phi(X)$を求めよう．$\alpha=\sum_{i=1}^n a_i dx^i$とかくと

$$a_k=\alpha(\partial/\partial x^k)=g(\partial/\partial x^j,\partial/\partial x^k)=g_{jk}$$

したがって　$\phi(X)=\sum_{k=1}^n g_{jk}dx^k$　となる．一般に$X=(X^j)$すなわち$X=\sum_{j=1}^n X^j\partial/\partial x^j$ならば

$$\phi(X)=\sum_{j,k=1}^n g_{jk}X^jdx^k=\sum_{j,k=1}^n g_{kj}X^jdx^k$$

だから$\phi(X)$の成分は$\left(\sum_{j=1}^n g_{kj}X^j\right)$である．

テンソル解析の慣習にしたがって$\phi(X)$の成分を(X_k)とかくことにすると

$$X_k=\sum_{j=1}^n g_{kj}X^j \tag{10}$$

となる．

次に，同形対応ϕを用いて$T_x(M)$の内積gを$T_x{}^*(M)$に移すことを考える．すなわち

$$g^*(\alpha,\beta)=g(\phi^{-1}(\alpha),\phi^{-1}(\beta))$$

によって$T_x{}^*(M)$の内積を定義する．いま$\phi^{-1}(\alpha)=\partial/\partial x^i$, $\phi^{-1}(\beta)=\partial/\partial x^j$したがって　$\alpha=\sum_{k=1}^n g_{ik}dx^k$, $\beta=\sum_{l=1}^n g_{jl}dx^l$　であるとき

$$g^{kl}=g^*(dx^k,dx^l)$$

とおいて上式をかいてみると

$$\sum_{k,l=1}^{n} g_{ik}g_{jl}g^{*kl}=g_{ij}$$

これから容易に $g^{*kl}=g^{kl}$ が得られる．したがって，$[g_{ij}]$ の逆行列の成分として導入した $[g^{ij}]$ は実は $T_x{}^*(M)$ の内積 g^* の $\{x^1,\cdots,x^n\}$ に関する成分

$$g^{ij}=g^*(dx^i,dx^j) \tag{6'}$$

であることがわかった．

上にのべた $T_x(M)$ から $T_x{}^*(M)$ への同形対応 ϕ を用いて M 上の微分可能関数 f の **勾配** (gradient) とよばれるベクトル場を定義しよう．それは f の微分 df を考えて

$$(\mathrm{grad}\,f)_x=\phi^{-1}(df)_x \tag{11}$$

によって定まるベクトル場である．

問 局所座標系 $\{x^1,\cdots,x^n\}$ に関して $df=\sum_{i=1}^{n} f_i dx^i$, ここで $f_i=\partial f/\partial x^i$ であるから

$$\mathrm{grad}\,f=\sum_{i=1}^{n} f^i\partial/\partial x^i \qquad \text{ここで} \qquad f^i=\sum_{j=1}^{n} g^{ij}f_j$$

となることを示せ．

問 $\mathrm{grad}\,f$ は $f=$ 定数という等位面に垂直であることを示せ．

次にベクトル場 X の **発散** (divergence) とよばれる関数を定義しよう．X の共変導テンソル ∇X は $(1,1)$ 型のテンソル場であるから，各点でそのトレースをとって

(12) $(\mathrm{div}\,X)_x=V\in T_x(M)\to\nabla_V X\in T_x(M)$ のトレース

とする．

いま局所座標系 $\{x^1,\cdots,x^n\}$ に関して $X=(X^i)$ とすると $\nabla X=(X^i{}_{;j})$ であるから

$$\mathrm{div}\,X=\sum_{i=1}^{n} X^i{}_{;i}$$

となる．

問 関数 f とベクトル場 X に対して

$$\mathrm{div}\,(fX)=Xf+f\,\mathrm{div}\,X$$

であることを示せ.

また関数fに対する**ラプラシアン** (Laplacian) を次のように定義する：

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \tag{13}$$

Δ を**ラプラス作用素**または**ラプラス・ベルトラミ作用素** (Laplace-Beltrami operator) とよぶ. 局所座標系でかくと $\operatorname{grad} f = \sum f_i \partial/\partial x^i$, ここで $f_i = \partial f/\partial x^i$ だから

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} f^i{}_{;i} = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} f_{j;i} = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} f_{i;j}$$

とかける.

ここに現れる $f_{i;j}$ は, 次のように定義される関数fの**ヘッシアン** (Hessian) の成分になっている. すなわち $\nabla(df)$ は (0,2) 型のテンソル場で, これを H_f とかくと, ベクトル場 X, Y に対して

$$\begin{aligned} H_f(X, Y) &= (\nabla_Y(df))(X) = YXf - df(\nabla_Y X) \\ &= YXf - (\nabla_Y X)f \end{aligned} \tag{14}$$

となる.

このテンソル H_f は実は対称, $H_f(Y, X) = H_f(X, Y)$ であることに注意する. これは

$$\begin{aligned} H_f(Y, X) - H_f(X, Y) &= XYf - YXf - (\nabla_X Y)f + (\nabla_Y X)f \\ &= ([X, Y] - \nabla_X Y + \nabla_Y X)f \end{aligned}$$

レビ・チビタ接続の捩率テンソルは0であるから, これは0となる. (14)で定義される $T_x(M)$ の上の対称双線形関数 H_f をヘッシアンとよぶ. 特にfの**臨界点** (critical point) x (すなわち $(df)_x = 0$ となる点) においては, $X, Y \in T_x(M)$ を任意にベクトル場に拡張して

$$H_f(X, Y) = YXf = XYf$$

局所座標系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ に関しては

$$H_f(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$$

となって, これはレビ・チビタ接続を使わないで定義できる**臨界点におけるヘッシアン**である. なお, 一般の点におけるヘッシアンも捩率0の線形

接続さえあれば定義できることに注意しておこう．

最後に，H_f のトレースを，各点 x で

$$\sum_{i=1}^{n} H_f(X_i, X_i) \qquad \text{ただし } \{X_1, \cdots, X_n\} \text{ は正規直交基}$$

と定義しよう．これが正規直交基のとり方に無関係であることを確かめるのはやさしい．

問　Δf は H_f のトレースに等しいことを示せ．

以上リーマン計量とそのレビ・チビタ接続に基づいたテンソル解析の基本をのべたが，計量が測地線に関係してくる事情の中で一番簡単なことだけをここでのべておこう．いま x_t が t をアファイン助変数とする測地線であるとき（すなわち $\nabla_t x_t'=0$），接ベクトル x_t' の長さ $\|x_t'\|=\sqrt{g(x_t', x_t')}$ は一定である．この値を c とすると，$t=0$ から測った弧長助変数 s は $s=ct$ で与えられ，s もまたアファイン助変数である．リーマン多様体では，弧長 s を助変数として測地線を表すのが便利であり，測地線が $-\infty<s<\infty$ に対して定義されているとき完備である．

§2. 曲率テンソル，リッチ・テンソル

レビ・チビタ接続の曲率テンソル場 R はもちろん

$$R(X, Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z$$

で定義される (1,3) 型のテンソル場である．計量 g に関して $\nabla g=0$ であるから，任意のベクトル場 X, Z, W に関して

$$(1)\qquad Xg(Z, W)=g(\nabla_X Z, W)+g(Z, \nabla_X W)$$

が成り立つ．さて Z, W を固定して関数 $g(Z, W)$ が得られるがこれを f とかくと，括弧積 $[X, Y]$ の定義から

$$(2)\qquad X(Yf)-Y(Xf)-[X, Y]f=0$$

となる．ここで (1) により

$$Yf=Yg(Z, W)=g(\nabla_Y Z, W)+g(Z, \nabla_Y W)$$

したがって

$$X(Yf)=X\{g(\nabla_Y Z, W)+g(Z, \nabla_Y W)\}$$

$$= g(\nabla_X \nabla_Y Z, W) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y W) + g(Z, \nabla_X \nabla_Y W)$$

となる．ここで再び (1) を使った．同様に

$$Y(Xf) = g(\nabla_Y \nabla_X Z, W) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y W) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) + g(Z, \nabla_Y \nabla_X W)$$

また

$$[X, Y]f = g(\nabla_{[X,Y]} Z, W) + g(Z, \nabla_{[X,Y]} W)$$

であるから (2) により

$$g(R(X, Y)Z, W) + g(Z, R(X, Y)W) = 0 \tag{3}$$

が得られる．これは各点 x で $X, Y \in T_x(M)$ に対する変換 $R(X, Y)$ が $T_x(M)$ の歪対称な線形変換であることを示している．

捩率 0 の線形接続のときに知られているように (第3章 §6)，R はビアンキの恒等式

$$\mathfrak{S}\{R(X, Y)Z\} = 0 \tag{4}$$

$$\mathfrak{S}\{(\nabla_Z R)(X, Y)\} = 0 \tag{5}$$

をみたしている．

次に**リッチ・テンソル** (Ricci tensor) を次のように定義する．各点xで，$X, Y \in T_x(M)$ としたとき

$$\mathrm{Ric}\,(X, Y) = \text{線形変換 } V \to R(V, X)Y \text{ のトレース}$$

したがって Ric は (0, 2) 型のテンソルであり，対称すなわち

$$\mathrm{Ric}\,(Y, X) = \mathrm{Ric}\,(X, Y) \tag{6}$$

が成り立つ．なぜならば (4) により

$$R(V, X)Y + R(X, Y)V = R(V, Y)X$$

となる．一方 (3) により線形変換 $V \to R(X, Y)V$ のトレースは 0 であるから，$V \to R(V, X)Y$ のトレースすなわち $\mathrm{Ric}\,(X, Y)$ と，$V \to R(V, Y)X$ のトレースすなわち $\mathrm{Ric}\,(Y, X)$ とは等しい．

局所座標系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ に関するRの成分は

$$R(\partial/\partial x^j, \partial/\partial x^k)\partial/\partial x^m = \sum_{i=1}^{n} R^i{}_{mjk} \partial/\partial x^i$$

できめられる $(R^i{}_{mjk})$ である．ここで

(7) $$R_{lmjk}=g(R(\partial/\partial x^j,\partial/\partial x^k)\partial/\partial x^m,\partial/\partial x^l)$$

と定義すると

(8) $$R_{lmjk}=\sum_{i=1}^{n} g_{li}R^i{}_{mjk}$$

が得られる．(3) は R_{lmjk} が l と m に関して歪対称であることを意味する．j と k に関して歪対称なことも明らかである．またビアンキの恒等式 (4) は

(9) $$R_{lmjk}+R_{ljkm}+R_{lkmj}=0$$

とかけるが，添字をとりかえて

(9a) $$R_{mjkl}+R_{mklj}+R_{mljk}=0$$

(9b) $$R_{jklm}+R_{jlmk}+R_{jmkl}=0$$

(9c) $$R_{klmj}+R_{kmjl}+R_{kjlm}=0$$

となる．(9)＋(9c)－(9a)－(9b) を作って最初の 2 個の添字，最後の 2 個の添字に関する歪対称の性質を使うと

(10) $$R_{lmjk}=R_{jklm}$$

という式が得られる．

以上のことをまとめて

定理 1 $(X,Y,U,V)\to g(R(U,V)Y,X)$ という (0, 4) 型の（曲率）テンソルの成分を (7) のようにかけば

$$R_{mljk}=-R_{lmjk}$$
$$R_{lmkj}=-R_{lmjk}$$
$$R_{lmjk}=R_{jklm}$$

が成り立つ．最後の式は

$$g(R(U,V)Y,X)=g(R(X,Y)V,U)$$

を意味する．

次に Ric の成分を求めよう．Ric $(\partial/\partial x^i,\partial/\partial x^j)$ は $V\to R(V,\partial/\partial x^i)\partial/\partial x^j$ という変換のトレースで，この変換は

$$\partial/\partial x^k\to\sum_{m=1}^{n}R^m{}_{jki}\partial/\partial x^m$$

であるから

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{Ric}(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) = \sum_{k=1}^{n} R^k{}_{jki}$$

となる．右辺を R_{ji} とかくのが慣習である．$R_{ij}=R_{ji}$ でこれらが Ric の成分を作る．

さらに Ric のトレースを**スカラー曲率** (scalar curvature) とよび，テンソル解析の本ではRで表すのが普通であるが，我々はこれをρとかくことにする．したがって点xで $T_x(M)$ の正規直交基を $\{X_1, \cdots, X_n\}$ とすれば

$$\text{(12)} \qquad \rho = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}\,(X_i, X_i)$$

また (0,2) 型テンソル Ric に対応する (1,1) 型のテンソルを Ric* とかく．すなわち

$$\text{(13)} \qquad g(\mathrm{Ric}^*(X), Y) = \mathrm{Ric}\,(X, Y)$$

であるとすると Ric* は $T_x(M)$ の g に関する対称線形変換であって，その座標系に関する成分は

$$\text{(14)} \qquad R^i{}_j = \sum_{k=1}^{n} g^{ik} R_{kj}$$

となる．したがって

$$\text{(15)} \qquad \rho = \sum_{i=1}^{n} R^i{}_i$$

も成り立つ．

問 Ric*(X) は双線形写像 $(Y, Z) \to R(X, Y)Z$ のトレースに等しいことを示せ．

ここで次の定理を証明しておこう．

定理 2 連結なリーマン多様体 (M, g) $(\dim M \geqq 3)$ に対して

$$\mathrm{Ric} = \lambda g$$

がある関数について成り立てば，実はλは定数である．

［**証明**］ ビアンキの第2恒等式

$$\mathfrak{S}\{(\nabla_Z R)(X, Y)\} = 0$$

から

$$R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l} = 0$$

を得る．この式に g^{ik} と g^{jl} を掛けて i, j, k, l について和をとると

$$\sum_{i,k} g^{ik} R_{ijkl} = R_{jl} = \lambda g_{jl}$$

に注意して

$$(n-2)\lambda_m = 0$$

を得るから，$n \geqq 3$ のときは $\partial\lambda/\partial x^m = 0$，したがって λ は局所的に，したがって連結な M 全体の上で定数である．

いま $\mathrm{Ric} = cg$ が定数 c に対して成り立つとき，M を**アインシュタイン空間** (Einstein space)，g を**アインシュタイン計量** (Einstein metric) とよぶ．この定義も上の定理もリーマン計量だけでなく，不定値な計量の場合にも適用することに注意しておこう．

§3. 超曲面の幾何

ここでユークリッド空間 E^{n+1} の超曲面 M^n の上のリーマン幾何をとり扱うことにする．一般にいえば，n 次元多様体 M^n とその E^{n+1} の中へのはめこみ f が与えられているとき M^n を E^{n+1} の**はめこまれた超曲面** (immersed hypersurface) という．実際によく現れるのは E^{n+1} の中で，たとえば $(x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = 1$ で定義される単位球面 S^n のように，適当な方程式 $f(x^1, \cdots, x^{n+1}) = 0$ をみたす点全体の作る n 次元部分多様体である（第1章 §2 参照）．

さて，M^n が f によって E^{n+1} にはめこまれた超曲面であるとき，M^n の各点 x の接空間 $T_x(M)$ で

(1)　$$g_x(X, Y) = \langle f_*X, f_*Y \rangle, \qquad X, Y \in T_x(M)$$

と定義する．ここで $\langle\ ,\ \rangle$ は E^{n+1} の普通の内積を表す．g_x が $T_x(M)$ の正値内積であることは容易に確かめられる．いま $\{y^1, \cdots, y^{n+1}\}$ を E^{n+1} のユークリッド座標系とし，点 x の M における近傍 U の局所座標系を $\{x^1, \cdots, x^n\}$ として，f を　$y^p = f^p(x^1, \cdots, x^n)$ $(1 \leqq p \leqq n+1)$ と表すと

$$f_*(\partial/\partial x^i) = \sum_{p=1}^{n+1} \frac{\partial f^p}{\partial x^i} \partial/\partial y^p, \qquad 1 \leqq i \leqq n$$

であるから

$$g_{ij}=g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)=\sum_{p=1}^{n+1}\frac{\partial f^p}{\partial x^i}\frac{\partial f^p}{\partial x^j}$$

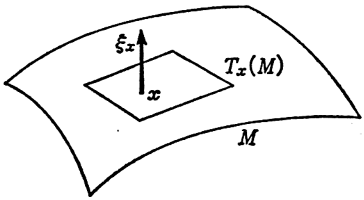
となり，g_{ij} は $\{x^1,\cdots,x^n\}$ の微分可能関数である．すなわち $x\to g_x$ は M 上のリーマン計量 g である．これを M の**誘導されたリーマン計量** (induced Riemannian metric) とよぶ． またこれを M の**第1基本形式** (first fundamental form) ともよぶことがある．

このリーマン計量から定まる M のレビ・チビタ接続を幾何学的に見出すとともに，**第 2 基本形式** (second fundamental form) とよばれるものを定義しよう．

M のベクトル場全体を $\mathfrak{X}(M)$， f に沿うベクトル場全体を $\mathfrak{X}_f$ で表す． $X, Y\in\mathfrak{X}(M)$ のとき，$f_*(Y)\in\mathfrak{X}_f$ であって，第3章§7でみたように E^{n+1} の普通の線形接続の共変微分演算 D から $D_X f_*(Y)\in\mathfrak{X}_f$ が定まる．M の各点 x で $(D_X f_*(Y))_x$ は $f(x)$ での E^{n+1} の接ベクトルであるが，これを M に接する成分と M に直交する成分との和に分解して

$$(D_X f_*(Y))_x=f_*(\nabla_X Y)_x+\alpha_x(X, Y)$$

とかくことにする．ここで，$(\nabla_X Y)_x$ はある $T_x(M)$ の元で，一方 $\alpha_x(X, Y)$ は $f(x)$ における E^{n+1} の接ベクトルで $f_*(Z)$ $(Z\in T_x(M))$ という形のすべてのベクトルに直交しているベクトルを表す．この $\alpha_x(X, Y)$ をもっと具体的に表すために，M の点 x_0 をきめたとき，その M での近傍 U を適当にとれば，U の上の f に沿う単位ベクトル場 ξ で，U の各点 x で $\langle\xi_y, f_*(Z)\rangle=0$ がすべての $Z\in T_x(M)$ に対して成り立つようなものがとれる．この ξ を U 上の**単位法ベクトル場** (unit normal vector field) とよぶ．M が方向づけ可能のときは ξ を M 全体の上で選ぶことができるが，ここでのとり扱い方には ξ が局所的に存在することだけで十分である． 以下 ξ の存在する近傍 U のみを考えて式をかくことにする (4-1 図)．



4-1 図

そうすると

$$\alpha_x(X, Y) = h(X, Y)\xi_x$$

とかくことができ，ここで $h(X, Y)$ は $T_x(M)$ の上の双線形関数となる．これを ξ **に対応する第2基本形式** (second fundamental form corresponding to ξ) とよぶ．また ξ の代わりに $-\xi$ を単位法ベクトル場に選んだとすると，対応した第2基本形式は $-h$ となることに注意しておこう．以上をまとめて

$$(2) \qquad D_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi$$

とかく．曲面論でこの式は**ガウス** (Gauss) **の公式**とよばれている．

この式 (2) から $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ という写像が M の共変微分演算を与えることがわかる．X または Y に関する加法性は明らかである．φ を M 上の関数とすると

$$D_{\varphi X} f_*(Y) = \varphi D_X f_* Y$$

から $\nabla_{\varphi X} Y = \varphi \nabla_X Y$ が得られる．一方

$$D_X f_*(\varphi Y) = D_X(\varphi f_*(Y)) = (X\varphi) f_*(Y) + \varphi D_X(f_*(Y))$$

で，右辺の第1項は M に接しているから

$$\nabla_X(\varphi Y) = (X\varphi) Y + \varphi \nabla_X Y$$

が得られることにする．実際この ∇ が誘導された計量 g に対するレビ・チビタ接続になっていることは，以下において明らかになる．その前に形作用素とよばれる M の (1,1) 型のテンソル場を定義しておこう．

そのために $\xi \in \mathfrak{X}_f$ と考えて $\langle \xi, \xi \rangle = 1$ から $\langle D_X \xi, \xi \rangle = 0$ となるから，$D_X \xi$ は U の各点で M に接している．すなわち各点 x で

$$(D_X \xi)_x = f_*(Y)$$

となる $Y \in T_x(M)$ が存在することがわかる．この Y を $-AX$ とかいて

$$(3) \qquad D_X \xi = -f_*(AX)$$

という式が得られる．曲面論ではこれを**ワインガルテン** (Weingarten) **の公式**とよぶ．ここで Y を AX とかいたのは，それが X に依存しているベクトルであり，この対応を $X \to AX$ で表したわけであるが，実は $X \to D_X \xi$ が，線形写像であるから $X \to AX$ も線形写像となる．したがって A は各点 x で $T_x(M)$ の線形写像を与える (1,1) 型テンソル場である．

問　Aの微分可能性を確かめよ.

このAを**形作用素** (shape operator) とよぶ. 単位法ベクトル場ξが各接線方向 X に対してどのように曲っているかを表すことによって M の各点での E^{n+1} への入り方, すなわち M の形を表すものと考えられるからである.

実際はhとAとの間に

(4)　$$h(X, Y) = g(AX, Y)$$

という関係が成り立つ. これをみるためには $Y \in \mathfrak{X}(M)$ をとり $\langle f_*Y, \xi\rangle = 0$ から

$$\langle D_X f_*Y, \xi\rangle + \langle f_*Y, D_X\xi\rangle = 0$$

が得られるが $\langle D_X Y, \xi\rangle = h(X, Y)\langle\xi, \xi\rangle = h(X, Y)$, $\langle f_*Y, D_X\xi\rangle = \langle f_*Y, f_*(-AX)\rangle = -g(AX, Y)$ であるから (4) が得られる.

さて E^{n+1} の線形接続 D が,

1) 捩率テンソルが0, すなわち $D_X f_*(Y) - D_Y f_*(X) = f_*([X, Y])$

2) 曲率テンソルが0

3) $\langle\ ,\ \rangle$ に関して計量的

という性質をもっていることから $\mathfrak{X}_f$ に対する共変微分演算に対して,

(5)　$$D_X f_*(Y) - D_Y f_*(X) - f_*([X, Y]) = 0$$

(6)　$$D_X D_Y f_*(Z) - D_Y D_X f_*(Z) - D_{[X,Y]} f_*(Z) = 0$$

(7)　$$X\langle f_*(Y), f_*(Z)\rangle = \langle D_X f_*(Y), f_*(Z)\rangle + \langle f_*(Y), D_X f_*(Z)\rangle$$

がすべての $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して成り立つ.

さて (5) の式を (2) を使ってかきかえて, その M に接する成分をとると

(8)　$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$$

が得られ, 一方 M に直交する成分をみると

(9)　$$h(Y, X) = h(X, Y)$$

が得られる.

(8) から ∇ の捩率テンソルが0になることがわかった. (9) と (4) からAが各点で対称線形写像であることがわかる.

次に (7) の左辺で $\langle f_*(Y), f_*(Z)\rangle = g(Y, Z)$ であり, 右辺で

$$\langle D_X f_*(Y), f_*(Z)\rangle = \langle f_*(\nabla_X Y), f_*(Z)\rangle = g(\nabla_X Y, Z)$$
$$\langle f_*(Y), D_X f_*(Z)\rangle = \langle f_*(Y), f_*(\nabla_X Z)\rangle = g(Y, \nabla_X Z)$$

であることに注意すれば,

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{10}$$

が得られる．すなわち ∇ は g に関して計量的である．これで ∇ が g に関するレビ・チビタ接続であることがわかった.

最後に (6) から重要な方程式が二つ得られることになる．そのために (2) をくり返して使うと

$$\begin{aligned} D_X(D_Y f_*(Z)) &= D_X(f_*(\nabla_Y Z) + h(Y,Z)\xi) \\ &= f_*(\nabla_X\nabla_Y Z) + h(X, \nabla_Y Z)\xi + X(h(Y,Z))\xi \\ &\quad + h(Y,Z)D_X\xi \end{aligned}$$

となる．(3) により上式は

$$= f_*(\nabla_X\nabla_Y Z - h(Y,Z)AX) + (h(X,\nabla_Y Z) + X(h(Y,Z)))\xi$$

となる．X, Y を交換して同様の式が得られ，また

$$D_{[X,Y]}f_*(Z) = f_*(\nabla_{[X,Y]}Z) + h([X,Y],Z)\xi$$

であるからこれらの式を使って (6) をかき直し，その M に接する成分と M に垂直な成分がそれぞれ 0 になることから

$$\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z = h(Y,Z)AX - h(X,Z)AY \tag{11}$$

と,

$$\begin{aligned} X(h(Y,Z)) - h(Y,\nabla_X Z) - Y(h(X,Z)) \\ + h(X,\nabla_Y Z) - h([X,Y],Z) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

が得られる.

(11) から M の曲率テンソル R が

$$R(X,Y)Z = g(AY,Z)AX - g(AX,Z)AY$$

を満足することがわかる．ここで一般に内積をもつベクトル空間 V があるとき，その $X, Y \in V$ に対して $X\wedge Y$ によって

$$Z \in V \to \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y \in V$$

という V の線形変換を表すことにしよう．この記号を内積 g をもつ $T_x(M)$ に対して用いると

(13)
$$R(X, Y) = AX \wedge AY$$
が得られる．これを**ガウスの方程式** (equation of Gauss) とよぶ．

一方 $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ を使って (12) から

(14)
$$(\nabla_X h)(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z)$$
が得られる．$h(Y, Z) = g(AY, Z)$ という関係を使うと (14) はまた

(14′)
$$(\nabla_X A)(Y) = (\nabla_Y A)(X)$$
ともかくことができる．(14)，(14′) を**コダッチの方程式** (equation of Codazzi) とよぶ．

ガウスの方程式とコダッチの方程式は超曲面の幾何の基本的方程式である．前者は誘導されたリーマン計量 g によって定まってくる曲率テンソル R と，超曲面 M が E^{n+1} の中に入っている様子からきまる形作用素 A との間の各点での代数的関係を表している．A を知ればもちろん R をきめることができる (§5 でやるように)．逆に R を知っている場合，それから A に関する情報を得ることができる (たとえば $R=0$ としたとき，A の階数が各点で $\leqq 1$ であることがわかる．この事実は平坦な超曲面を調べる上で大切である)．

コダッチの方程式は形作用素 A が満足しなければならない偏微分方程式であるといってよい．いま (M, g) がリーマン多様体であるとしよう．このとき，1次元高いユークリッド空間 E^{n+1} の中の超曲面として M を実現し，ちょうど g が誘導されたリーマン計量になっているようにできるか，いいかえれば $M \to E^{n+1}$ といううめこみ f で等長的であるもの，すなわち $g(X, Y) = \langle f_*(X), f_*(Y) \rangle$ がすべての接ベクトル X, Y に対して成り立つものが存在するかという問題を考えてみよう．もしそれが肯定的ならば，M 上には (いま簡単のため M を単連結としておいて) g に関して対称な (1, 1) 型のテンソル場 A が存在して，しかも g のレビ・チビタ接続 ∇ に関してコダッチの方程式をみたすものがなければならないことになる．実際 (M が単連結のとき) このようなテンソル場 A が存在すれば，M から E^{n+1} への等長的はめこみが E^{n+1} の合同変換を除いて一意的に存在するという超曲面の基本定理が成り立つことになるのである．

問　内積をもつベクトル空間 V の次元を n として，線形変換 $Z \to (Z \wedge X)\,Y$ のト

レースは $(n-1)\langle X, Y\rangle$ に等しいことを示せ.

問 ガウスの方程式から，リッチ・テンソル，スカラー曲率 ρ に関する次の公式を導け（tr はトレースを意味する）.

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = g(AX, Y)\,\mathrm{tr}\,A - g(A^2X, Y)$$

$$\mathrm{Ric}^* = (\mathrm{tr}\,A)A - A^2$$

$$\rho = (\mathrm{tr}\,A)^2 - \mathrm{tr}\,(A^2)$$

問 超曲面 M の形作用素 A が，ある関数 λ に対して $A=\lambda I$ (I は恒等変換) のとき (M を連結として)，λ は定数であることを証明せよ（コダッチの方程式を使え）.

特に M が E^3 の曲面であるとき，Aの行列式 K を**ガウスの曲率** (Gaussian curvature) という．これは単位法ベクトル場のとり方に無関係，なぜならば ξ の代りに $-\xi$ をとると A は $-A$ に変わるが $-A$ の行列式は A の行列式に等しいからである．いま，点 x で対称変換 A の固有ベクトルで正規直交基を作る．X_1, Y_1 をとり　$AX_1=\lambda X_1$, $AY_1=\mu Y_1$ とすれば，固有値 λ, μ の積がガウスの曲率 K に等しい．ガウスの方程式から

$$R(X_1, Y_1) = \lambda\mu\ X_1 \wedge Y_1 = K\ X_1 \wedge Y_1$$

となるから

$$g(R(X_1, Y_1)Y_1, X_1) = K$$

が得られる．しかも左辺は正規直交基 X_1, Y_1 をどのようにとっても（すなわちAの固有ベクトルでなくても）いつも同じ値をもつことが容易にわかる．定義によれば形作用素 A の行列式である K が，実際はリーマン計量 g によって完全にきまってしまうことがわかったのである．これがガウス自身が Theorema Egregium とよんだ結果である．ここでてきた $g(R(X_1, Y_1)Y_1, X_1)$ という表現を，次の §4 で一般 n 次元のリーマン多様体の場合に考えよう．

最後に，初めにもどってガウスの公式 (2) を考え直してみよう．いま x_t が超曲面 M 上の曲線で，$Y=Y_t$ が曲線に沿う M の接ベクトル場であるとしよう．このとき (2) の代りに（f_* を省略して）

$$\frac{dY}{dt} = \nabla_t Y + h(x_t', Y_t)\xi_t$$

を得る．ここで $\nabla_t Y$ は M のレビ・チビタ接続に関する曲線に沿う共変微分

である. t を定めて E^{n+1} の部分空間 $T_{x_t}(M)$ への正射影を P_t で表すことにすると

$$\nabla_t Y = P_t\left(\frac{dY}{dt}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P_t(Y_{t+\varepsilon}) - Y_t}{\varepsilon}$$

となる. この式は超曲面 M のレビ・チビタ接続の一つの幾何的解釈を与えている. $Y_{t+\varepsilon}$ は接空間 $T_{x_t}(M)$ に属さないから, そこへ正射影してから Y_t との差をとることになる.

レビ・チビタ接続の運動学的 (kinematic) 解釈は次のようである. 簡単のため $n=2$ として, たとえば球面 S^2 が1点 x_0 での接平面 $T_{x_0}(M)$ にのっていると考える. x_0 から出発する S^2 上の任意の曲線 x_t が与えられたとき, S^2 を瞬間 t には点 x_t が平面 $T_{x_0}(M)$ の上にくるように, 平面の上にころがすことを想像する. すなわち $t \to f_t$ という1助変数運動を求め, $f_t(S^2)$ が点 $f_t(x_t)$ で平面 $T_{x_0}(M)$ に接しているようにする. このとき, すべったり, 空回りをしたりすることはないと仮定する (このことを運動学的に厳密に定義する必要がある). このようなころがし方によって曲線 x_t の平面 $T_{x_0}(M)$ の軌跡 (すなわち $y_t = f_t(x_t)$) が, 実は第3章 §10 でのべたような曲線 x_t の $T_{x_0}(M)$ への展開になっている. このような解釈は球面以外の, また任意の n について E^{n+1} の超曲面 M に対して可能である. 詳しいことは次の論文をみられたい.
K. Nomizu : Kinematics and differential geometry — Rolling a ball with a prescribed locus of contact, Tohoku Math. J. 30 (1978), 623–637.

§4. 断面曲率

§3 でのべたガウスの曲率の拡張としてリーマン多様体 M の断面曲率を定義しよう. 任意の点 x の接空間 $T_x(M)$ の2次元部分空間を**平面** (plane) または**平面切り口** (plane section) とよぶ. σ の任意の基 $\{X, Y\}$ をとると, シュワルツの不等式から $g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2 > 0$ となる. ここで

$$\frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

という量を考える. これが σ にだけ関係し, 基 $\{X, Y\}$ のとり方に無関係であ

ることを確かめよう．そのために別の基 $\{X_1, Y_1\}$ をとり

$$X_1 = aX + bY, \qquad Y_1 = cX + dY$$

であるとすると，Rの性質を使って

$$g(R(X_1, Y_1)Y_1, X_1) = (ad - bc)^2 g(R(X, Y)Y, X)$$

また

$$g(X_1, X_1)g(Y_1, Y_1) - g(X_1, Y_1)^2$$
$$= (ad - bc)^2\{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2\}$$

が成り立つから我々の主張が確かめられる．ここで

$$(1) \qquad K(\sigma) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

を σ の **断面曲率** (sectional curvature) とよぶ．

特に $\{X, Y\}$ を正規直交基とすると，(1) は

$$K(\sigma) = g(R(X, Y)Y, X)$$

となる．

曲率テンソル場Rが 0 に等しいときは，当然断面曲率 $K(\sigma)$ はすべての点のすべての平面 σ に対して 0 になる．逆に $K(\sigma) = 0$ がすべての σ に対して成り立てば $R = 0$ ということがいえる．もっと一般に次の事実を証明しよう．

定理 1　リーマン多様体 M の任意の点を x とする．もし x におけるすべての平面 σ に対して

$$K(\sigma) = c \qquad (\text{定数})$$

であるならば，x における曲率テンソル R は

$$R(X, Y) = cX \wedge Y$$

となる．この逆も成り立つ．

ここで $X \wedge Y$ は §3 で定義した

$$Z \to g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

という線形変換であるが，それは g に関して歪対称

$$g((X \wedge Y)Z, U) + g(Z, (X \wedge Y)U) = 0$$

であること，また $X \wedge Y$ は X, Y に関して双線形でかつ

$$Y \wedge X = -X \wedge Y, \qquad \mathfrak{S}\{(X \wedge Y)Z\} = 0$$

が成り立つことが容易に確かめられる．この記号を用いると (1) は

$$(1')\qquad K(\sigma)=\frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g((X\wedge Y)Y,X)}$$

とかき直すことができる．もし $R(X,Y)=cX\wedge Y$ ならば (1′) から当然 $K(\sigma)=c$ となる．これで定理の逆の部分が証明できた．

さて定理の主要部分を証明するために，R_0 によって

$$R_0(X,Y)=X\wedge Y$$

となる (1,3) 型のテンソルを表す（点 x でのみ考えれば十分であるが，M 全体でも定義できている）．$\{X,Y\}$ が 1 次独立なベクトルの組であれば，仮定により

$$g(R(X,Y)Y,X)=cg((X\wedge Y)Y,X)$$

であるから $R'=R-cR_0$ とかくと

$$(2)\qquad g(R'(X,Y)Y,X)=0$$

となる．ここで R' は R,R_0 と同様に $R'(X,Y)$ は歪対称変換，かつ

$$R'(Y,X)=-R'(X,Y),\qquad \mathfrak{S}\{R'(X,Y)Z\}=0$$

という性質をもつ (1,3) 型のテンソルである．これらの性質だけを使って $R'=0$ であることを証明しよう．

(2) は X,Y が 1 次従属であるとき $R'(X,Y)=0$ だから当然成り立つ．すなわちすべての X,Y に関して (2) が成り立つ．いま Y の代わりに $Y+Z$ とおいて（Z も任意のベクトル）(2) をかくと

$$g(R'(X,Y+Z)(Y+Z),X)=0$$

したがって

$$g(R'(X,Y)Y,X)+g(R'(X,Y)Z,X)$$
$$+g(R'(X,Z)Y,X)+g(R'(X,Z)Z,X)=0$$

ここで第 1 項と第 4 項は仮定から 0 である．一方 $R'(X,Z)Y=R'(Y,Z)X+R'(X,Y)Z$ だから

$$g(R'(X,Z)Y,X)=g(R'(X,Y)Z,X)$$

上の式と組合わせて

$$g(R'(X,Y)Z,X)=0$$

を得る．これから $g(R'(X,Y)X,Z)=0$ が成り立ち，ここでZは任意だから

（3）$$R'(X,Y)X=0$$

がすべての X,Y について成り立つことになる．Xの代わりに $X+Z$ とかいた式から，この性質 (3) を使うと

（4）$$R'(X,Y)Z+R'(Z,Y)X=0$$

を得る．ここで X,Y,Z をとりかえて

（4'）$$R'(Y,Z)X+R'(X,Z)Y=0$$

（4''）$$R'(Z,X)Y+R'(Y,X)Z=0$$

(4)＋(4')－(4'') を作ると

（4'''）$$R'(X,Y)Z+R'(X,Z)Y=0$$

(4) と (4''') から $R'(X,Z)Y=R'(Z,Y)X=R'(Y,X)Z$ となり R' に対するビアンキの第1恒等式によりこの和が0であることから，各項が0すなわち $R'(X,Z)Y=0$ となる．X,Y,Z は任意であるから $R'=0$ の証明が終る．

次に**シューア** (F. Schur) の定理を証明しよう．

定理 2　Mが，次元が3またはそれ以上の連結リーマン多様体であるとする．もし各点において断面曲率 $K(\sigma)$ が定数に等しいならば，M全体の上で $K(\sigma)$ は定数に等しい．

［**証明**］ 定理1によって各点 x に対し，ある数 $\lambda=\lambda_x$ があって $R=\lambda R_0$ が成り立つ．ここで R_0 は前にのべたように $R_0(X,Y)=X\wedge Y$ で定義されるテンソル場である．関数λが定数であることを示そう．

まずテンソル場 R_0 の共変導テンソルは0であることに注意しよう．これは R_0 がリーマン計量gによって定義されていて，$\nabla g=0$ ということからいえる．したがって

$$\nabla_X R=(X\lambda)R_0$$

となる．これから

$$(\nabla_X R)(Y,Z)=(X\lambda)R_0(Y,Z)=(X\lambda)Y\wedge Z$$

ビアンキの第2恒等式から

（5）$$(X\lambda)(Y\wedge Z)+(Y\lambda)(Z\wedge X)+(Z\lambda)(X\wedge Y)=0$$

任意の点xの任意の単位ベクトルXに対して $\{X,Y,Z\}$ が正規直交系になるように Y, Z を選ぶ（M の次元が少なくとも3であることから）．(5) を Z に適用すると

$$(X\lambda)Y-(Y\lambda)X=0$$

が得られる．X, Y は1次独立だから $X\lambda=Y\lambda=0$．これで λ が定数であることが証明できたことになる．

注意　上の定理は，$R=\lambda R_0$ であるならば λ は定数であるといいかえてもよい．§2 のリッチ・テンソルに関する定理 2，また §3 の形作用素 $A=\lambda I$ であるとき λ は定数になるという問と同じ型の結果であることに注意しよう．

リーマン多様体 M の断面曲率 K が M 上で定数 c に等しい場合，すなわち $R=cR_0$ が各点で成り立つとき，M を**定曲率空間** (space of constant curvature) とよぶ．M がさらに完備のときには**空間形** (space form) ともよぶ．

最後に，リッチ・テンソルと断面曲率との関係は次のように得られる．X を $T_x(M)$ の単位ベクトルとするとき，$X=X_1$ となるような $T_x(M)$ の正規直交基 $\{X_1, \cdots, X_n\}$ をとる．X_1, X_i $(i \geqq 2)$ で張られる平面 σ_i の断面曲率 $K(\sigma_i)$ は

$$K(\sigma_i)=g(R(X_i, X_1)X_1, X_i)$$

とかける．一方

$$\mathrm{Ric}\,(X, X)=\sum_{i=1}^{n} g(R(X_i, X)X, X_i)=\sum_{i=2}^{n} g(R(X_i, X_1)X_1, X_i)$$

であるから

$$\mathrm{Ric}(X, X)=\sum_{i=2}^{n} K(\sigma_i) \tag{6}$$

という関係式が得られる．

問　E^{n+1} の超曲面 M の1点での接ベクトル X, Y で張られる平面の断面曲率は

$$\frac{h(X, X)h(Y, Y)-h(X, Y)^2}{g(X, X)g(Y, Y)-g(X, Y)^2}$$

であることを示せ．ここで h はもちろん第2基本形式である．

§5. 定曲率空間

ユークリッド空間 E^n の普通の計量は $R=0$ であるから，断面曲率は0である．

E^{n+1} の半径 r の球面 $S^n(r)$ が E^{n+1} から誘導されたリーマン計量は断面曲率が正の定数 $1/r^2$ に等しいことを示そう.

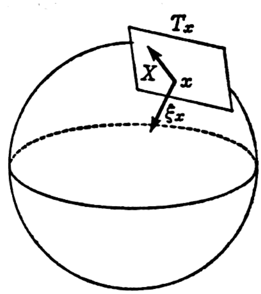
負の定曲率をもつリーマン多様体の典型的なモデルは，いわゆる双曲型空間 $H^n(r)$ である. これはユークリッド空間でなく，ローレンツ空間 L^{n+1} の中の超曲面として定義されることになる.

$S^n(r)$, $H^n(r)$ の測地線をすべて決定する. $n=2$ のとき $H^2(1)$ は複素関数論でよく論じられるように，単位円内または上半面上のいわゆるポアンカレ計量と等長になる.

E^{n+1} の直交座標系を $\{x^1, \cdots, x^{n+1}\}$ として半径 r の球面

$$(1)\qquad \begin{aligned} S^n(r) &= \{x \in E^{n+1}; \langle x, x\rangle = r^2\} \\ &= \{x \in E^{n+1}; (x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = r^2\} \end{aligned}$$

を考える. $S^n(r)$ の各点 x に対し $\xi_x = -x/r$ とおくと，ξ は $S^n(r)$ 全体の上で定義された**内側に向いている** (inward) 単位法ベクトル場である. 一方接空間 $T_x(S^n(r))$ は $\langle X, x\rangle = 0$ となるベクトル X 全体と考えてよい (4-2 図).



4-2 図

いま $X \in T_x(S^n(r))$ として $D_X\xi$ をとる. 容易にわかるように，位置ベクトル場 x 自身に対しては

$$D_X x = X$$

となるから

$$D_X\xi = -\frac{X}{r}$$

したがって形作用素 A は

$$A = \frac{I}{r} \qquad (I: 恒等変換)$$

で与えられる. ガウスの方程式から $S^n(r)$ の曲率テンソル R は

$$(2)\qquad R(X, Y) = \frac{1}{r^2}\, X \wedge Y$$

これは $S^n(r)$ の断面曲率がつねに正の定数 $1/r^2$ に等しいことを示している.

任意の正数 $c>0$ に対して，$r=1/\sqrt{c}$ をとることにより，c を定曲率とする空間が作れることになる.

ここで $S^n(r)$ の測地線を求めよう．表現を簡単にするために $r=1$ と仮定することにしよう．$S^n(1)$ を単に S^n とかく.

一般に M が E^{n+1} の超曲面であるとき，M の曲線 x_t が測地線であるための条件を形作用素（または第2基本形式）を作って求めよう．測地線である，すなわち $\nabla_t x_t'=0$ というのは各点の近傍で確かめる条件であるから，M が E^{n+1} に含まれているとしてよい．ガウスの公式は

$$D_t x_t' = \nabla_t x_t' + h(x_t', x_t')\xi_{x_t}$$

で，$\nabla_t x_t'=0$ であるための必要かつ十分な条件は

$$D_t x_t' = h(x_t', x_t')\xi_{x_t}$$

となる．ここで $\xi_{x_t}=-x_t$, $h(x_t', x_t')=g(x_t', x_t')$,

$$D_t x_t' = D_t \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

であるから，特に t が弧長助変数：$g(x_t', x_t')=1$ であるとすると，x_t が測地線であるための方程式は結局

（3）
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x_t$$

となる．初期条件 $x_0=x$, $\vec{x}_0=X$（単位接ベクトル）に対する解は

（4）
$$x_t = \cos t\, x + \sin t\, X$$

で与えられる．これが一般の測地線である．(4) は x とそれに直交する X によって張られる E^{n+1} の平面と S^n との交わりであり**大円** (great circle) とよばれる.

問　S^n の点 x と点 $-x$ とを通る測地線は無数にあることを示せ.

問　S^n の2点 x, y $(\neq -x)$ に対してそれを通る大円はちょうど一つ存在する．それによってきまる測地線に沿う x から y への距離（すなわち x から y までの測地線の弧長）d は $\cos d=\langle x, y\rangle$ から求まることを示せ.

次に，双曲型空間を定義しよう．そのためにベクトル空間 R^{n+1} に，正値ではないが非退化な対称双線形関数

(5) $$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i - x^{n+1} y^{n+1}$$

を考えてこれを**ローレンツ内積** (Lorentzian inner product) とよび，この内積をもつ R^{n+1} のことを**ローレンツ空間** (Lorentzian space) とよび L^{n+1} で表す．ローレンツ空間に関する詳しいことは第5章でとり扱うから，ここでは簡単に話を進めることにする．

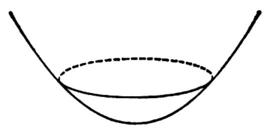
L^{n+1} の中で超曲面

$$\{x \in L^{n+1}; \langle x, x\rangle = -r^2\}$$
$$= \{x \in L^{n+1}; (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 - (x^{n+1})^2 = -r^2\}$$

は二つの連結成分をもつ．一方は $x^{n+1} > 0$ (したがって $x^{n+1} \geqq r$)，他方は $x^{n+1} < 0$ (したがって $x^{n+1} \leqq -r$) によって定まる．ここで

(6) $$H^n(r) = \{x \in L^{n+1}; \langle x, x\rangle = -r^2, x^{n+1} > 0\}$$

とおく (4-3 図)．



4-3 図

$H^n(r)$ の点 x での接空間は $\langle x_t, x_t\rangle = -r^2$ となる曲線 x_t ($x_0 = x$) の接ベクトル X すなわち $\langle x, X\rangle = 0$ となるベクトル全体と考えてよい．いま $\xi_x = -x/r$ とおくと ξ は $H^n(r)$ 全体の上で定義された法ベクトル場と考えることができ $\langle \xi_x, \xi_x\rangle = -1$ となる．ローレンツ内積を $T_x(H^n(r))$ に制限すると，これは正値になることがわかる．なぜなら

$$L^{n+1} = T_x(H^n(r)) \oplus (\xi_x) \qquad (\text{直交直和})$$

で $\langle \xi_x, \xi_x\rangle = -1$ であるから，したがって $H^n(r)$ 上には (正値) リーマン計量が誘導されることになる．この計量 g をもつ $H^n(r)$ を**双曲型空間** (hyperbolic space) とよぶ．$H^n(r)$ は L^{n+1} の中に等長的に入っていると考えられる．

一般に，L^{n+1} の中にリーマン多様体 (M, g) が等長的に入っているとすると，局所的には $\langle \xi, \xi\rangle = -1$ となるような法ベクトル場 ξ が選べる．ユークリッド空間の超曲面 (§3) と同様に

$$D_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)\xi$$

$$D_X\xi = -AX$$

という公式をかくことができる（ただし $M \subset L^{n+1}$ と考えるからはめこみ f は省略してある）．やはり A を形作用素，h を第2基本形式とよぶが，その間の関係は §3 の (4) と異なり

$$h(X, Y) = -g(AX, Y) \tag{7}$$

となる．§3 と同様に $\nabla_X Y$ が g のレビ・チビタ接続であることがわかる．その曲率テンソル R を同じ方法で求めると符号が変わって，

$$R(X, Y) = -AX \wedge AY \tag{8}$$

となることがわかる．

問 式 (7), (8) を導け．

さて $H^n(r)$ の場合にもどると，$\xi_x = -x/r$ から $A = I/r$ (I：恒等変換) となり，(8) から

$$R(X, Y) = -\frac{1}{r^2} X \wedge Y \tag{9}$$

となる．これは $H^n(r)$ の断面曲率が負の定数 $-1/r^2$ に等しいことを示している．任意の負数 c に対して $r = 1/\sqrt{-c}$ をとることにより，c を定曲率とする空間が作れることになる．

$r = 1$ として $H^n = H^n(1)$ の測地線を求めよう．方法は S^n のときと同様である．t を弧長助変数とする H^n の曲線 x_t が測地線であるためには

$$D_t x_t' = h(x_t', x_t')\xi_{x_t}$$

であることが必要かつ十分であることは S^n のときと同様だが，$h(x_t', x_t') = -g(x_t', x_t') = -1$, $\xi_{x_t} = -x_t$ だから

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x_t \tag{10}$$

が測地線の方程式ということになる．初期条件 $x_0 = x$, $\vec{x_0} = X$（単位接ベクトル）に対する解は，双曲線関数を用いて

$$x_t = \cosh t\, x + \sinh t\, X \tag{11}$$

で与えられる．(11) は x とそれに直交する X とによって張られる L^{n+1} の平面と H^n との交わりの曲線である．

S^n と異なって，H^n の任意の異なる2点 x, y に対しそれらを通る測地線が必ず一つ存在する．なぜなら x, y が1次従属とすると $y=\lambda x$ から $-1=\langle y, y\rangle=\lambda^2\langle x, x\rangle=-\lambda^2$ であるから $y=x$ または $y=-x$ となるが，後者の場合は $x^{n+1}>0,\ y^{n+1}=-x^{n+1}<0$ となり $y^{n+1}>0$ に矛盾する．したがって x, y は1次独立だからそれらの張る平面と H^r の交わりである測地線をとればよい．この測地線に沿って x から y までの距離（弧長）を d とすると

$$\cosh d\, x+\sinh d\, X=y$$

であり，x との内積をとることによって

$$\cosh d=-\langle x, y\rangle$$

となる．実際 H^n の2点 x, y に対して $\langle x, y\rangle$ は必ず $\leqq -1$ となることがわかり，したがって上の式で d が定まることになる．$\langle x, y\rangle\leqq -1$ であることについては第5章 §1 をみられたい．

$n=2$ のとき H^2 は，ロバチェフスキー (Lobačevski)，ボリヤイ (Bolyai)，またガウス (Gauss) によって創始された非ユークリッド幾何学 (Non-Euclidean geometry) の場になっている．すなわち H^2 の点を“点”，測地線を“直線”とよぶことによって，直線の外に与えられた1点を通って平行線が無数に存在する非ユークリッド幾何が得られる．

また H^2 は次にのべるような二つの2次元リーマン多様体に等長である．

まず平面の単位円内部 $D: x^2+y^2<1$ において

$$\langle \partial/\partial x, \partial/\partial x\rangle=\langle \partial/\partial y, \partial/\partial y\rangle=\frac{4}{(1-(x^2+y^2))^2}$$

$$\langle \partial/\partial x, \partial/\partial y\rangle=0$$

で与えられるようなリーマン計量，古典的には

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{(1-(x^2+y^2))^2}$$

と表される計量を考える．複素数 $z=x+iy$ を使うと

$$ds^2=\frac{4\,dz\,d\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$$

ともかける．

次に上半面 $U=\{(u,v); v>0\}$ において

$$\langle\partial/\partial u, \partial/\partial u\rangle=\langle\partial/\partial v, \partial/\partial v\rangle=\frac{1}{v^2}$$

$$\langle\partial/\partial u, \partial/\partial v\rangle=0$$

すなわち

$$ds^2=\frac{du^2+dv^2}{v^2}$$

で与えられるリーマン計量を考える.

D および U のこの計量はともに**ポアンカレ計量** (Poincaré metric) とよばれている. D と U との間の等長写像については, 本選書 17, 小林昭七：曲線と曲面の微分幾何, p. 86 を参照のこと.

§6. 曲線の長さの変分とその応用

リーマン多様体 (M,g) が与えられたとき, そのレビ・チビタ接続, 曲率テンソル, 断面曲率等を論じたが, 任意の区分的に微分可能な曲線 τ に対して, その**長さ** (arc length) $L(\tau)$ を定義しよう.

まず, $\tau: x_t\,(a\leqq t\leqq b)$ が微分可能な曲線である場合は, 各点の接ベクトル x_t' の g による長さを積分することにより, 長さ

$$L(\tau)=\int_a^b\sqrt{g(x_t', x_t')}\,dt \tag{1}$$

を定義する. 区分的に微分可能な曲線に対して, この定義を自然に拡張できることは明らかであろう.

いま, 与えられた曲線 τ を少し変えることを考える. 正確には τ の**変分** (variation) とは, 微分可能な写像

$$f:\quad (t,s)\in[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to f(t,s)\in M$$

で $f(t,0)=x_t$ となるものをいう. 変分が τ の両端を固定するとは, すべての s に対して

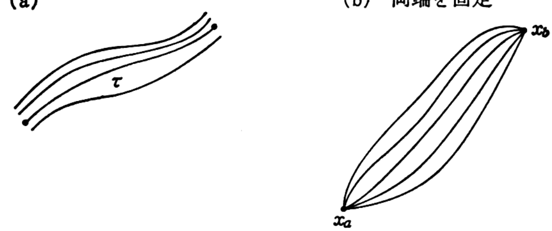
$$f(a,s)=x_a,\qquad f(b,s)=x_b \tag{2}$$

となることである (4-4 図).

変分 f に沿うベクトル場 $f_*(\partial/\partial t)$, $f_*(\partial/\partial s)$ が定義でき, さらに

(3) $$X_t = f_*(\partial/\partial s)_{(t,0)}$$

とおくと，X_t は曲線 τ に沿うベクトル場で，f の**変分ベクトル場** (variational vector field) とよばれる．(2) が成り立つときは



4-4 図

(4) $$X_a = 0, \qquad X_b = 0$$

となる．各 s に対し曲線 $t \to f(t, s)$ $(a \leqq t \leqq b)$ を τ_s とよび，その長さを

(5) $$L(s) = L(\tau_s) = \int_a^b \sqrt{g(f_*(\partial/\partial t), f_*(\partial/\partial t))}\, dt$$

とする．このとき

$$\left(\frac{dL}{ds}\right)_{s=0}, \qquad \left(\frac{d^2L}{ds^2}\right)_{s=0}$$

をそれぞれ**第1変分** (first variation)，**第2変分** (second variation) とよぶ．以下これらを計算しよう．計算の便宜上，初めの曲線 τ に対しては t が弧長助変数に比例していると仮定しよう．すなわちある $k > 0$ に対して

(6) $$\sqrt{g(x_t', x_t')} = k \qquad したがって \qquad L(\tau) = (b-a)k$$

である．

まず (5) から

$$\frac{dL}{ds} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{g(f_*(\partial/\partial t), f_*(\partial/\partial t))}\, dt$$

であるが，

$$\frac{\partial}{\partial s}\sqrt{g(f_*(\partial/\partial t), f_*(\partial/\partial t))} = \frac{(\partial/\partial s) g(f_*(\partial/\partial t), f_*(\partial/\partial t))}{2\sqrt{g(f_*(\partial/\partial t), f_*(\partial/\partial t))}}$$

$$= \frac{g(\nabla_s f_*(\partial/\partial t), f_*(\partial/\partial t))}{\sqrt{g(f_*(\partial/\partial t), f_*(\partial/\partial t))}}$$

ここで $\nabla_s f_*(\partial/\partial t)=\nabla_t f_*(\partial/\partial s)$ とかきかえ（第3章§7の終），$s=0$ とおくと

$$g(\nabla_t f_*(\partial/\partial s), f_*(\partial/\partial t))=g(\nabla_t X, x_t')=\frac{d}{dt}g(X, x_t')-g(X, \nabla_t x_t')$$

$$\sqrt{g(f_*(\partial/\partial t), f_*(\partial/\partial t))}=\sqrt{g(x_t', x_t')}=k$$

であるから

$$\left(\frac{dL}{ds}\right)_{s=0}=\int_a^b\left[\frac{d}{dt}g(X, x_t')-g(X, \nabla_t x_t')\right]dt\Big/k$$

求める公式は

$$(7)\quad \left(\frac{dL}{ds}\right)_{s=0}=\left\{g(X, x_t')_{t=b}-g(X, x_t')_{t=a}-\int_a^b g(X, \nabla_t x_t')dt\right\}\Big/k$$

両端を固定する変分に対しては $X_a=0$, $X_b=0$ から

$$(8)\quad \left(\frac{dL}{ds}\right)_{s=0}=\frac{-1}{k}\int_a^b g(X, \nabla_t x_t')\,dt$$

が得られる．

いま，たとえば曲線 τ がそれを含む開集合 U の中で τ と両端を共有するすべての曲線の中で最短の長さをもつと仮定しよう．τ に沿う両端で0になる任意のベクトル場 X に対して，それを変分ベクトル場とする変分 f を作ると，それに対して(8)が0になるから

$$(9)\quad \int_a^b g(X, \nabla_t x_t')dt=0$$

が両端で0になる任意の X に対して成り立つことになる．これから $\nabla_t x_t'=0$ が成り立つ，すなわち τ は測地線であることが次のようにすればわかる．すなわち $\varphi(t)$ を a, b で0，その間では正の値をとる微分可能関数として $X_t=\varphi\nabla_t x_t'$ をとると，(8)から

$$\int_a^b \varphi g(\nabla_t x_t', \nabla_t x_t')dt=0$$

ここで被積分関数は $\geqq 0$ だからそれは0でなければならない．ゆえに $\nabla_t x_t'=0$ が $a<t<b$ に対して，したがって a, b でも成り立つことがわかる．これで次の定理が証明できたことになる．

定理 I 曲線 τ が，その近傍の τ と両端を共有するすべての曲線の中で最短の長さをもっている場合，τ は測地線である．

測地線の長さに関する問題をもっと調べるためには第2変分が必要になってくることは当然である．τ が t を弧長助変数とする測地線であるとして，その両端を固定する変分 f に対して変分ベクトル場 X の τ に直交する成分を $X^{\perp}$ とかくとき，すなわち

$$X^{\perp}=X-g(X, x_t')x_t' \tag{10}$$

としたとき

$$\left(\frac{d^2L}{ds^2}\right)_{s=0}=\int_a^b\{g(\nabla_t X^{\perp}, \nabla_t X^{\perp})-g(R(X^{\perp}, x_t')x_t', X)\}dt \tag{11}$$

となる．

ここでは，計算は省略するが二つの事柄に注意しておく．まず (11) の証明には，すでに用いた $\nabla_s f_*(\partial/\partial t)=\nabla_t f_*(\partial/\partial s)$ の他に曲率テンソル R を含んだ

$$\nabla_s\nabla_t f_*(\partial/\partial s)=\nabla_t\nabla_s f_*(\partial/\partial s)+R(f_*(\partial/\partial s), f_*(\partial/\partial t))f_*(\partial/\partial s)$$

という式（第3章 §7）を使うこと．また公式 (11) の右辺の第2項 $g(R(X^{\perp}, x_t')x_t', X^{\perp})$ は $X^{\perp}$ と x_t' とが張る平面の断面曲率の $g(X^{\perp}, X^{\perp})$ 倍に等しいことである．したがって，たとえば M の断面曲率がつねに $\leqq 0$ であると仮定すると (11) の右辺は $\geqq 0$ で，それが0になるのは各点で $X^{\perp}=0$ になるときに限ることがわかる．

第2変分の公式についてはこれ以上立ち入らないで，第1変分の公式のもう一つの応用として**ガウスの補題**といわれる定理を証明しておこう．そのために，リーマン多様体 M の各点 x での指数写像 Exp は，第3章 §9 でのように定義されることに注意しよう．計量を用いて，ある正数 r に対して指数写像が

$$N_x=\{X\in T_x(M); g(X, X)<r^2\}$$

からその像 U_x の上への微分同相を与えていると仮定できる．N_x の任意の点 X での指数写像の微分 $(\mathrm{Exp})_{*X}$ を考える．

定理 2（**ガウスの補題**） 任意の $X \in N_x$ に対し，$W \in T_x(M)$ を X に直交するベクトルとし，これを $T_X(T_x(M))$ の元と考える．このとき $(\mathrm{Exp})_{*X}(W)$ は，点 $\mathrm{Exp}\,X$ において測地線 $x_t = \mathrm{Exp}\,tX$ に直交する．

［**証明**］ $\|X\| = k$ とする．いま X_s を $X_0 = X$, $(dX/ds)_{s=0} = W$ かつ $\|X_s\| = k$ であるような曲線として

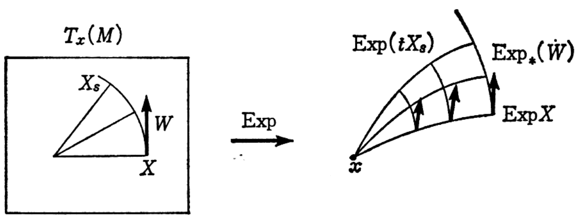
$$f(t, s) = \mathrm{Exp}\,tX_s, \qquad 0 \leqq t \leqq 1,\ -\varepsilon < s < \varepsilon$$

を考える．f は測地線 $\mathrm{Exp}\,tX$ の変分で，各 s に対して $f(t, s)\,(0 \leqq t \leqq 1)$ は x から出発する測地線になっている．その変分ベクトル場を $W_t{}^*$ とすると

$$W_1{}^* = (\mathrm{Exp})_{*X}(W)$$

であることがわかる．すべての s に対して $L(s) = k$ であるから $(dL/ds)_{s=0} = 0$. 第1変分の公式 (7) から $\nabla_t x_t' = 0$ に注意して次式を得る（4-5 図）．

$$\frac{1}{k}\{g(W_1{}^*, x_1')\} = 0$$



4-5 図

次に，これを使って次の定理を証明しよう．

定理 3 リーマン多様体 M の点 x において，指数写像 Exp が $T_x(M)$ の 0 の近傍 $N_x = \{X; \|X\| < r\}$ からその像 U_x への微分同相を与えるとしよう．このとき U_x の任意の点 $y = \mathrm{Exp}\,X\,(\|X\| = l < r)$ に対して測地線 $\tau = \mathrm{Exp}\,tX\,(0 \leqq t \leqq 1)$ は，x から y へのどの曲線よりも短い長さをもつ．

［**証明**］ いま x から y への曲線 $\tau' = x_s\,(0 \leqq s \leqq 1)$ が U_x に含まれているとしよう．N_x の曲線 $X_s\,(0 \leqq s \leqq 1)$ があって $x_s = \mathrm{Exp}\,X_s$ であるとしてよい．$x_s = x$ であるのは $s = 0$ のときだけであると考えてよいから，$X_s = 0$ になるのは $s = 0$ のときだけである．$s > 0$ に対して

$$t_s = \|X_s\|, \qquad Z_s = \frac{X_s}{t_s}$$

とおくと，$\|Z_s\|=1$ で $X_s=t_sZ_s$ となる（ここで (t,Z) は X に対する極座標と考えてよい）．$s=s_0$ で X_s の接ベクトルをとると

$$\left(\frac{dX}{ds}\right)_{s_0}=\left(\frac{dt}{ds}\right)_{s_0}Z_{s_0}+t_{s_0}\left(\frac{dZ}{ds}\right)_{s_0}$$

ここで

$\left(\dfrac{dt}{ds}\right)_{s_0}Z_{s_0}$ は 曲線 $s\to tZ_{s_0}$ の $s=s_0$ での接ベクトル

$t_{s_0}\left(\dfrac{dZ}{ds}\right)_{s_0}$ は 曲線 $s\to t_{s_0}Z$ の $s=s_0$ での接ベクトル

であって，この二つのベクトルは直交している（なぜならば $\|Z_s\|=1$ から Z_{s_0} と $(dZ/ds)_{s_0}$ とが直交）．

ガウスの補題から，点 $x_{s_0}=\mathrm{Exp}\,(X_{s_0})$ において

$$g\left((\mathrm{Exp})_*\left(\left(\frac{dt}{ds}\right)_{s_0}Z_{s_0}\right),\ (\mathrm{Exp})_*\left(t_{s_0}\left(\frac{dZ}{ds}\right)_{s_0}\right)\right)=0$$

したがって

$$x_{s_0}'=(\mathrm{Exp})_*\left(\left(\frac{dX}{ds}\right)_{s_0}\right)=(\mathrm{Exp})_*\left(\left(\frac{dt}{ds}\right)_{s_0}Z_{s_0}\right)+(\mathrm{Exp})_*\left(t_{s_0}\left(\frac{dZ}{ds}\right)_{s_0}\right)$$

の長さは $(\mathrm{Exp})_*((dt/ds)_{s_0}Z_{s_0})$ の長さより小さくない．後者は $|dt/ds|_{s_0}$ である．ゆえに

$$\|x_{s_0}'\|\geqq\left|\frac{dt}{ds}\right|_{s_0}\geqq\left(\frac{dt}{ds}\right)_{s_0}$$

ここで s_0 は0以外任意であるから

$$\begin{aligned}L(\tau')=&\int_0^1\|\vec{x}_s\|ds\geqq\int_0^1\left(\frac{dt}{ds}\right)ds=t(1)-t(0)\\&=t(1)=\|X\|=l\end{aligned}$$

一方，$L(\tau)$ は明らかに l に等しいから $L(\tau')\geqq L(\tau)$ が証明できた．曲線 τ' が U の中に含まれていないときは x から出て初めて U の境界にあう点を z とし，x から z までの部分を τ'' とすれば $L(\tau')>L(\tau'')$ は明らかで，さらに $L(\tau'')>l$ であることもすでに証明したことから容易に導けるから，結局 $L(\tau')>l$ となる．

注意 定理において，$L(\tau')=L(\tau)$ となるのは τ' が U に含まれ，かつ各 s において $dZ/ds=0$ となる場合，したがって $X_s=\|X_s\|Z_1$，$x_s=\mathrm{Exp}\|X_s\|Z_1$ となる場合だけで，すなわち τ' は測地線 τ の助変数だけかえたものである．

問 この注意の主張を証明せよ．

§7. ヤコビ場とその応用

§6 で考えた変分の特別の場合として，リーマン多様体 M の与えられた測地線 $\tau=x_t\ (a\leqq t\leqq b;\ \nabla_t x_t'=0)$ の変分

$$f:\quad (t,s)\in[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$$

で，条件

(1) 各 s に対し曲線 $\tau^s: t\to f(t,s)$ は，t をアファイン助変数とする測地線である．

を満足するものを考えよう．このような変分 f の変分ベクトル場 X を**τ に沿うヤコビ場** (Jacobi field along τ) とよぶ．

定理 1　τ に沿うヤコビ場は次の 2 階共変微分方程式

(2)
$$\nabla_t^2 X+R(X,x_t')x_t'=0$$

を満足する．

［**証明**］ 変分 f に沿うベクトル場を §6 と同様にとり扱う．まず

$$\nabla_t f_*(\partial/\partial s)=\nabla_s f_*(\partial/\partial t)$$

から

$$\begin{aligned}\nabla_t^2 f_*(\partial/\partial s)&=\nabla_t\nabla_s f_*(\partial/\partial t)\\&=\nabla_s\nabla_t f_*(\partial/\partial t)+R(f_*\partial/\partial t, f_*\partial/\partial s)f_*(\partial/\partial t)\end{aligned}$$

となるが，各 s に対して $f(t,s)$ は t をアファイン助変数とする測地線であるから $\nabla_t f_*(\partial/\partial t)=0$．したがって $\nabla_s(\nabla_t f_*(\partial/\partial t))=0$．上の式を $s=0$ で評価して

$$\nabla_t^2 X=R(X,x_t')x_t'$$

すなわち (2) を得る．

方程式 (2) の解は初期条件 $X_a, (\nabla_t X)_{t=a}$ の組によって一意的に存在する．このことは (2) を普通の 2 階常微分方程式系に直してみるとわかる．このようなかきかえは後でのべる応用上も必要であるからきちんとやってみよう．

測地線 $\tau=x_t\ (a\leqq t\leqq b)$ の始点 x_a で接空間の基 $\{X_1,\cdots,X_n\}$ を選び，これを x_t に沿って平行に移動して得られるベクトル場を $\{X_1(t),\cdots,X_n(t)\}$ で表す．τ に沿う任意のベクトル場 X は

$$X=\sum_{j=1}^n \varphi^j(t)X_j(t)$$

とかくことができる．このとき

$$\nabla_t X = \sum_{j=1}^{n} \frac{d\varphi^j}{dt} X_j(t)$$

$$\nabla_t^2 X = \sum_{j=1}^{n} \frac{d^2\varphi^j}{dt^2} X_j(t)$$

となる．一方，x_t' は x_t に沿って平行だから

$$x_t' = \sum_{i=1}^{n} a^i X_i(t) \qquad (a^i \text{ は定数})$$

となり，また曲率テンソル場 R を τ に沿って考え，各点の基 $\{X_1(t), \cdots, X_n(t)\}$ に関して

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_{l=1}^{n} R^l{}_{kij}(t) X_l$$

と表すことにすると

$$R(X_t, x_t')x_t' = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} R^l{}_{kji}(t)\varphi^j a^i a^k X_l(t)$$

となるから (2) は

$$(3) \qquad \frac{d^2\varphi^l}{dt^2} + \sum_{i,j,k=1}^{n} R^l{}_{kji}(t)\varphi^j a^i a^k = 0, \qquad 1 \leqq l \leqq n$$

という常微分方程式系と同値であることがわかる．

定理1の逆を証明しておこう．

定理 2 測地線 $\tau = x_t\,(a \leqq t \leqq b)$ に沿うベクトル場 X が方程式 (2) を満足するとき，X はヤコビ場である．すなわち条件 (1) をみたす変分の変分ベクトル場である．

［証明］ 求める変分を具体的に作ることができる．そのために，まず x_a から出る曲線 $y_s\,(-\varepsilon < s < \varepsilon; \varepsilon > 0)$ で $y_0' = X_a$ となるものをとる．次に，この曲線に沿うベクトル場 W_s で

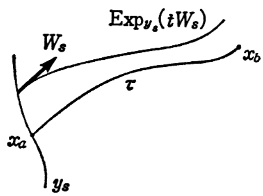
$$W_0 = x_a', \qquad (\nabla_s W)_{s=0} = (\nabla_t X)_{t=a}$$

をみたすようなものをとる（このような W を見出すためには，(2) から (3) を導いたような議論を曲線 y_s に使えば極めて容易である）．

さて

$$f(t,s) = \mathrm{Exp}_{y_s}(tW_s), \qquad a \leqq t \leqq b, \ -\varepsilon < s < \varepsilon$$

とおく．念のため，Exp_{y_s} は点 y_s における指数写像であるが，それがすべての tW_s ($a \leqq t \leqq b$) に対して定義できているように ε を小さくとり直しておく (M が完備のときはそのような心配は不要である)．この変分 f からきまる変分ベクトル場を Z とすると



4-6 図

（4） $Z_a = X_a, \qquad (\nabla_t Z)_a = (\nabla_t X)_a$

であることがわかる．したがって (2) の解である Z は X と τ に沿って一致する (4-6 図)．

問 (4) を確かめよ．

ヤコビ場は測地線の共役点という概念と密接な関係があり，測地線の大局的な性質，リーマン多様体の位相的性質の研究に重要な役割を演じるが，本書ではこの方面にはこれ以上立ち入らない．方程式 (2) (また同値な (3)) の応用として次の定理を証明しよう．

定理 3 M と N が共に n 次元，同じ定曲率をもつリーマン多様体とする．M の点 x_0 と $T_{x_0}(M)$ の正規直交基 $\{X_1, \cdots, X_n\}$，N の点 y_0 と $T_{y_0}(N)$ の正規直交基 $\{Y_1, \cdots, Y_n\}$ が与えられたとき，x_0 の近傍 U から y_0 の近傍 V の上への等長変換 f で

（5） $f(x_0) = y_0, \qquad f_*(X_i) = Y_i, \qquad 1 \leqq i \leqq n$

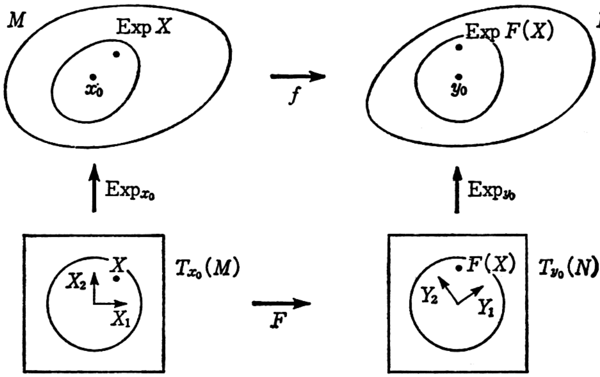
を満足するものが存在する．

［**証明**］ x_0 における指数写像 Exp_{x_0} が $N_{x_0} = \{X \in T_{x_0}(M); \|X\| < r\}$ からその像 U_{x_0} への微分同相を与えているとする．同様に，y_0 における指数写像が $N_{y_0} = \{Y \in T_{y_0}(N); \|Y\| < s\}$ からその像 V_{y_0} への微分同相を与えているとする．r と s とをその小さい方でとりかえることによって，上の記号を保ったまま $r = s$ であると仮定してよい．定理でいうような等長変換 f が存在するとすれば，等長変換はレビ・チビタ接続を保ち，したがって指数写像とも交換可能になるから任意の $X \in N_{x_0}$ に対して

（6） $f(\mathrm{Exp}_{x_0} X) = \mathrm{Exp}_{y_0}(F(X))$

ただし，右辺の F は $T_{x_0}(M)$ から $T_{y_0}(N)$ への等長線形写像で $F(X_i) = Y_i$ ($1 \leqq i \leqq n$) となるものである．したがって上の式 (6) によって f を定義する．すなわち U_{x_0} の任意の点 x は $x = \mathrm{Exp}_{x_0} X$ ($X \in N_{x_0}$) とかけ，$\|F(X)\| = \|X\|$ だから $F(X)$ は N_{y_0} に属し，したがって $\mathrm{Exp}_{y_0}(F(X))$ が定義されている．これを $f(x)$ とする (4-7 図)．

この写像fが U_{x_0} から V_{y_0} の上への微分同相であることは明らかであるが，等長的であることをいうために $x\in U_{x_0}$, $Z\in T_x(M)$ を任意にとるとき



4-7 図

(7) $$g_N(f_*(Z), f_*(Z)) = g_M(Z, Z)$$

ここで g_M, g_N はそれぞれ M, N のリーマン計量であることを証明すればよい.

$x = \mathrm{Exp}_{x_0}(X)$ $(X\in N_{x_0})$ とし適当な $W\in T_{x_0}(M)$ をとり，これを点 X における接ベクトルとみなしたとき，$Z=(\mathrm{Exp}_{x_0})_*(W)$ となるようにできる．適当に小さい $\varepsilon>0$ をとり

(8) $$f(t,s) = \mathrm{Exp}_{x_0} t(X+sW), \qquad 0\leqq t\leqq 1,\ -\varepsilon<s<\varepsilon$$

とおくと，f は x_0 からxへの測地線 $x_t = \mathrm{Exp}_{x_0}(tX)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ の変分で，各sに対して $t\to f(t,s)$ は測地線であるから，変分ベクトル場 Z_t はヤコビ場で明らかに $Z_0=0$, $Z_1=Z$ である.

N においても同様に，測地線 $y_t = \mathrm{Exp}_{y_0} tF(X)$ の変分

(9) $$h(t,s) = \mathrm{Exp}_{y_0} t(F(X)+sF(W)), \qquad 0\leqq t\leqq 1,\ -\varepsilon<s<\varepsilon$$

を定義し，変分ベクトル場 V_t がヤコビ場となり

$$V_0=0, \qquad V_1 = f_*(Z)$$

である．実際 $f_*(Z_t) = V_t$ が成り立つ．目的の(7)を示すために

(10) $$g_M(Z_t, Z_t) = g_N(V_t, V_t), \qquad 0\leqq t\leqq 1$$

を証明しよう.

x_0 における正規直交基 $\{X_1,\cdots,X_n\}$ を測地線 $x_t=\mathrm{Exp}_{x_0}(tX)$ に沿って平行移動したものを $\{X_1(t),\cdots,X_n(t)\}$ とし，同様に y_0 における正規直交基 $\{Y_1,\cdots,Y_n\}$

と測地線 $y_t=\mathrm{Exp}_{y_0}(tF(X))$ に沿って平行移動したものを $\{Y_1(t),\cdots,Y_n(t)\}$ とする．そこで

$$Z_t=\sum_{i=1}^{n}\varphi^i(t)X_i(t),\qquad V_t=\sum_{i=1}^{n}\psi^i(t)Y_i(t)$$

$$x_t'=\sum_{i=1}^{n}a^iX_i(t)\qquad(a^i \text{ は定数})$$

とすると，$y_0'=F(x_0')$ であるから

$$y_t'=\sum_{i=1}^{n}a^iY_i(t)$$

となる．

M の曲率テンソル R を x_t に沿って $\{X_1(t),\cdots,X_n(t)\}$ に関して表すと

$$\begin{aligned}R(X_j(t),X_i(t))X_k(t)&=c\{g_M(X_k(t),X_i(t))X_j(t)-g_M(X_k(t),X_j(t))X_i(t)\}\\&=c\{\delta_{ik}X_j(t)-\delta_{jk}X_i(t)\}\end{aligned}$$

だから，R の成分は

(11) $$R^l{}_{jik}=c(\delta_{ik}\delta_j{}^l-\delta_{jk}\delta_i{}^l)$$

となる．N の曲率テンソルの $\{Y_1(t),\cdots,Y_n(t)\}$ に関する成分も同様に (11) で与えられる．

したがって Z_t, V_t に対するヤコビの方程式 (3) は全く同じ方程式である．(10) を証明するためにすべての t に対して $\varphi^i(t)=\psi^i(t)\ (1\leqq i\leqq n)$ を証明すれば十分であるが，これらは同じ方程式系の解であるから初期条件が一致すること，すなわち

(12) $$\varphi^i(0)=\psi^i(0),\qquad 1\leqq i\leqq n$$

(13) $$\left(\frac{d\varphi^i}{dt}\right)_{t=0}=\left(\frac{d\psi^i}{dt}\right)_{t=0},\qquad 1\leqq i\leqq n$$

であることを示せばよい．(12) は $Z_0=0$，$V_0=0$ から明らかである．(13) を示すために

$$(\nabla_tZ_t)_{t=0}=W,\qquad(\nabla_tV_t)_{t=0}=F(W)$$

を証明しよう．前者は

$$(\nabla_tZ_t)_{t=0}=(\nabla_tf_*(\partial/\partial s)_{s=0})_{t=0}=(\nabla_sf_*(\partial/\partial t)_{t=0})_{s=0}$$

ここで $f_*(\partial/\partial t)_{t=0}=X+sW$ だから

$$(\nabla_sf_*(\partial/\partial t)_{t=0})_{s=0}=W$$

となる．$(\nabla_tV_t)_{t=0}$ についても同様である．

上の証明を検討してみると，ヤコビの方程式 (3) において曲率テンソル場の

平行な正規直交基 $\{X_i(t)\}$, $\{Y_i(t)\}$ に関する成分が，M, N に対して同じであることが本質的である．したがって定理を次のように一般化することができる．

リーマン多様体 M が $\nabla R=0$ という条件をみたすとき**局所対称的** (locally symmetric) とよぶ．このとき R はどの曲線に沿っても平行で，$\{X_i(t)\}$ が曲線 x_t に沿って平行な正規直交基のとき R の $\{X_i(t)\}$ に関する成分はすべて定数となる．

定理 4 M, N が共に n 次元局所対称的リーマン多様体，F が $T_{x_0}(M)$ から $T_{y_0}(N)$ への等長線形写像で曲率テンソルを保存する．すなわち

$$F(R_M(X, Y)Z)=R_N(F(X), F(Y))F(Z)$$

がすべての $X, Y, Z\in T_{x_0}(M)$ に対して成り立つ．ここで R_M, R_N はそれぞれ M, N の曲率テンソルを表すものとする．このとき x_0 の近傍 U から y_0 の近傍 V の上への等長変換 f で $(f_*)_{x_0}=F$ となるものが存在する．

これらの定理の系として次の結果が得られる．

系 1 n 次元定曲率 c のリーマン多様体 M は空間形 E^n ($c=0$ のとき)，$S^n(r)$ ($c>0$ のとき $r=1/\sqrt{c}$ として)，または $H^n(r)$ ($c<0$ のとき $r=1/\sqrt{-c}$ として) のいずれかと局所等長である．

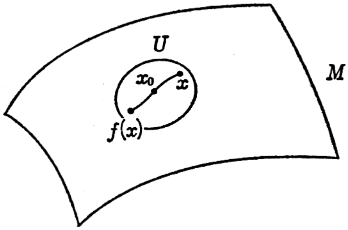
系 2 n 次元定曲率のリーマン多様体 M の任意の 2 点 x, y とそれらの正規直交基 $\{X_1, \cdots, X_n\}$, $\{Y_1, \cdots, Y_n\}$ に対し $f(x)=y$, $f_*(X_i)=Y_i$ $(1\leqq i\leqq n)$ となる局所等長写像 f が存在する．

系 3 局所対称的リーマン多様体 M の任意の 2 点 x, y に対し，x の近傍 U から y の近傍 V の上への等長変換が存在する．

[**系 3 の証明**] x から y への任意の曲線 τ をとり，それに沿う平行移動 F は $T_x(M)$ から $T_y(M)$ への曲率テンソルを保つ等長線形変換であることに注意すればよい．

局所対称的ということの幾何的意味は次のようである．1 点 x_0 の標準座標近傍を U とする．$U=\mathrm{Exp}_{x_0}N$ で $N=\{X\in T_{x_0}(M); \|X\|<r\}$ としてよい．点 x_0 に関する**局所対称** (local symmetry) とは，U を U にうつす等長変換 f で f^2 が恒等変換，かつ x_0 が孤立した不動点になっているようなものである．このとき $(f_*)_{x_0}(X)=-X$ がすべての $X\in T_{x_0}(M)$ に対

して成り立つから，実際局所対称 f が存在するとすれば一意的に定まり，各 $x \in U$ に対して x を x_0 に結ぶ測地線を同じ長さだけ延長して得られる点が $f(x)$ になっていることがわかる（4-8図）．さて，



4-8 図

定理 5　リーマン多様体 M が局所対称的（$\nabla R=0$）であるための必要かつ十分な条件は，各点 x_0 に対してその近傍での局所対称が存在することである．

［証明］　$\nabla R=0$ を仮定する．点 x_0 の接空間 $T_{x_0}(M)$ で $F(X)=-X$ とすれば，明らかに F は R を保つ（$R(-X,-Y)\times(-Z)=-R(X,Y)Z$）等長線形変換であるから定理4により，$x_0$ の近傍 U の等長変換 f で $f(x_0)=x_0(f_*)_{x_0}=F$ となるものが存在する．この f は明らかに局所対称である．逆に，各点 x_0 の近傍で局所対称 f が存在するとする．f は当然レビ・チビタ接続を，したがって曲率テンソルおよびその共変導テンソル ∇R を保つ．ゆえに x_0 において $(f_*)_{x_0}(X)=-X$ となる変換が

$$(\nabla_{-Z}R)(-X,-Y)(-W)=-(\nabla_Z R)(X,Y)(W)$$

という条件をみたすことになる．左辺は $(\nabla_Z R)(X,Y)(W)$ だから $\nabla R=0$ でなければならない．

問　M が局所対称的のとき，曲線 x_t に沿って平行な平面 σ_t の断面曲率は定数に等しいことを証明せよ．逆に，曲線に沿って平行な平面がいつも同じ断面曲率をもつとき，M は局所対称的であるか．

§8. 距離関数と完備性

(M,g) を連結リーマン多様体とする．その2点 x, y に対して，それらを結ぶあらゆる区分的に微分可能な曲線 τ の長さ $L(\tau)$ の下限を $d(x,y)$ と記す．この定義から，

1)　すべての x,y に対して　$d(x,y)\geqq 0$

2)　すべての x,y に対して　$d(y,x)=d(x,y)$

3)　すべての x,y,z に対して　$d(x,z)\leqq d(x,y)+d(y,z)$

であることは容易にわかる．もし，$d(x,y)=0$ となるのは $x=y$ のときだ

けであることがいえれば d は M の上の**距離関数** (distance function) になる．実際，これが事実でありしかもこの距離関数の定める位相は，M の多様体としての位相と一致することが §6 の定理 3 からほとんど明らかである（その定理において $y=\mathrm{Exp}\,X$, $\|X\|=l$ とすれば $d(x,y)=L(\tau)=l$ となっている）．

問 上の主張を証明せよ．

リーマン多様体 M が完備であるというのは，どの測地線も完備な測地線に拡張できることであるが，次の 2 定理がホップ・リノー (Hopf-Rinow) によって知られている．

定理 1 リーマン多様体 M に対して次の 3 条件は互いに同値である．

1) M は完備である．

2) M は距離関数 d に関して完備な距離空間である（すなわち d に関する任意のコーシー列が極限をもつ）．

3) M の d に関して有界な部分集合はコンパクトな閉包をもつ．

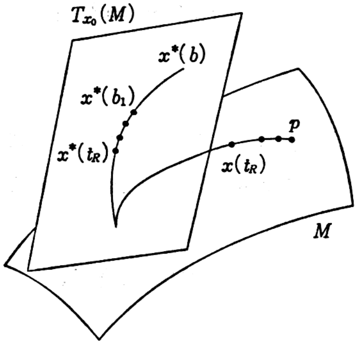
定理 2 連結リーマン多様体 M が完備ならば，任意の 2 点 x, y に対してそれらを結ぶ測地線 τ で $L(\tau)=d(x,y)$ となるものが存在する．

これらの定理の証明はかなり手間どるのでここでは省略するが，定理 1 の 2) ⇒ 1) の部分を一般化して第 3 章 §10 で予告した次の定理を証明しておこう．

定理 3 リーマン多様体 M が完備ならば全完備（エーレスマンの意味で完備）である．

［**証明**］ M の点 x の接空間 $T_x(M)$ に 0 を始点とする曲線 $C_t\,(0\leqq t\leqq b)$ が与えられたとき，M の x を始点とする曲線 $x_t\,(0\leqq t\leqq b)$ でその展開が C_t と一致するものがあることを証明する．第 3 章 §10 でみたように，ある $\delta>0$ に対して $0\leqq t\leqq\delta$ で定義された x_t で C_t に展開されるものが存在する．そのような δ の上限を b_1 として，$b_1=b$ であることを示す．いま，$0\leqq t<b_1$ で定義された曲線 x_t が存在するから $t_k\uparrow b_1$ となる数列 $\{t_k\}$ をとると，リーマン多様体の場合，曲線の展開は明らかに曲線の長さを保つから，x_t の $t_k\leqq t\leqq t_l\,(k<l)$ に対応する長さ $L_{k,l}$ は C_t の $t_k\leqq t\leqq t_l$ に対応する長さに等しく，これは $k,l\to\infty$ のとき 0 に収束する（なぜなら C_t

$\to C_{b_1}$ であるから）．一方 $d(x_{t_k}, x_{t_l})$ は $L_{k,l}$ よりも大きくない．したがって $\{x_{t_k}\}$ は d に関するコーシー列で，したがってある点 p に収束する（4-9図）．このことから $t\to b_1$ のとき x_t が p に収束することがわかる．$x_{b_1}=p$ とおくことによって，曲線 x_t が $[0, b_1]$ の上では連続で，$[0, b_1)$ の上では（無限回）微分可能であるように定義できたわけである．



4-9 図

実際は，x_t が $t=b_1$ においても（無限回）微分可能であることを証明しよう．念のため $[0, b_1]$ は閉区間，$[0, b_1)$ は区間 $0\leqq t<b_1$ である．

点 $p=x_{b_1}$ を原点とする近傍 U の局所座標系を $\{x^1, \cdots, x^n\}$ として x_t が U に含まれる部分 $b_1-\varepsilon<t\leqq b_1$ $(\varepsilon>0)$ で $x_t=(x^1(t), \cdots, x^n(t))$ であるとしよう．各 $x^i(t)$ は $[b_1-\varepsilon, b_1]$ で連続，$[b_1-\varepsilon, b_1)$ で無限回微分可能であるが，$t=b_1$ においても無限回微分可能すなわち左微係数の意味で，$x^i(t)$ が無限回微分可能であることを示そう．そのために

補題 1　関数 $\varphi(t)$ が $[a, b]$ で連続，$[a, b)$ で無限回微分可能とする．もし $\varphi'(t), \varphi''(t), \cdots, \varphi^{(k)}(t), \cdots$ がすべて $[a, b)$ で有界ならば φ は $t=b$ においても無限回微分可能である．

［証明］　任意の t に対して，平均値の定理から

（1）　$$\varphi(b)-\varphi(t)=(b-t)\varphi'(t_0)$$

となる $t_0\,(t<t_0<b)$ が存在する．一方任意の $t_1<t_2$ に対して

（2）　$$\varphi'(t_2)-\varphi'(t_1)=(t_2-t_1)\varphi''(t_3)$$

となる $t_3\,(t_1<t_3<t_2)$ が存在する．$\varphi''(t)$ は $[a, b)$ で有界（上限を m として）だから (2) により，

$$|\varphi'(t_2)-\varphi'(t_1)|\leqq m|t_2-t_1|$$

これから

$$\lim_{t\to b}\varphi'(t)$$

の存在することがわかる．(1) から

$$(3) \qquad \lim_{t\to b}\frac{\varphi(b)-\varphi(t)}{b-t}=\lim_{t\to b}\varphi'(t)$$

となる．(3) の値を $\varphi'(b)$ と定義すると φ' が $[a,b]$ で連続，$[a,b)$ において無限回微分可能，$\varphi'', \varphi''', \cdots$ が $[a,b)$ で有界であるから，上の議論をくり返すことにより $\varphi''(b)$ の存在がわかり，以下同様である．

我々の曲線 x_t の各座標成分 $x^i(t)$ が補題1の条件を区間 $[b_1-\varepsilon, b_1)$ において満足していることをいえばよいが，そのために

補題 2 コンパクトな閉包をもつ座標近傍 U の中に $[a,b]$ で連続，$[a,b)$ で無限回微分可能な曲線 x_t があるとする．もし

$$\|x_t'\|, \quad \|\nabla_t x_t'\|, \quad \|\nabla_t^2 x_t'\|, \quad \cdots, \quad \|\nabla_t^k x_t'\|, \quad \cdots$$

がすべて $[a,b)$ で有界ならば x_t の各座標成分 $x^i(t)$ は補題1の条件をみたす．

[証明] U において $\{x^1, \cdots, x^n\}$ をあたかもユークリッド座標系であるようにみなしたときのノルムを $|\ \ |$ で表すと，リーマン計量から得られるノルム $\|\ \ \|$ との間に，ある定数 $A, B>0$ があってすべての接ベクトル Y に対して

$$A\|Y\| \leqq |Y| \leqq B\|Y\|$$

という関係が成り立つ．また座標系に関するクリストッフェル記号 $\Gamma_j{}^i{}_k$ も U 上で有界と考えてよい．$\|\nabla_t x_t'\|$ は仮定により $[a,b)$ で有界だから，$\nabla_t x_t'$ の成分

$$X^i(t)=\frac{d^2x^i}{dt^2}+\sum_{j,k=1}^{n}\Gamma_j{}^i{}_k\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}$$

は有界，したがって d^2x^i/dt^2 も同じく $[a,b)$ で有界であることがわかる．

さらに $\|\nabla_t^2 x_t'\|$ も仮定により $[a,b)$ で有界であるから $\nabla_t^2 x_t'$ の成分

$$\frac{dX^i}{dt}+\sum_{j,k=1}^{n}\Gamma_j{}^i{}_k\frac{dx^j}{dt}X^k$$

は有界，したがって dX^i/dt も有界となる．$\Gamma_j{}^i{}_k$ の偏微分も有界であるから

$$\frac{d^3x^i}{dt^3}=\frac{d}{dt}\left(X^i(t)-\sum_{j,k=1}^{n}\Gamma_j{}^i{}_k\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right)$$

も $[a,b)$ において有界となる．より高次の導関数 d^kx^i/dt^k についても同様の議論をくり返すことができる．

補題 3 $x_t\,(0\leqq t<b_1)$ が $C_t\,(0\leqq t<b_1)$ に展開される曲線であるとき，$\|x_t'\|, \|\nabla_t x_t'\|, \cdots, \|\nabla_t^k x_t'\|, \cdots$ はすべて $[0,b_1)$ において有界である．

[証明] 展開の定義から，各 t について x_t' は dC/dt に 曲線に沿って平行であ

るから $\|x_t'\| = \|dC/dt\|$（右辺のノルムは点 $x = x_0$ の接空間における計量に関するノルム）で，これは $C(t)$ が $[0, b_1]$ で無限回微分可能だから，当然 $[0, b_1)$ において有界である．平行移動は線形写像であるから $\nabla_t x_t'$ は $(d/dt)(dC/dt)$ に平行で，したがって $\|\nabla_t x_t'\| = \|d^2C/dt^2\|$ となり，これは $0 \leqq t < b_1$ において有界である．以下高次の $\nabla_t^k x_t'$ についても同様である．

補題 1, 2, 3 により曲線 x_t が $[0, b_1]$ において，無限回微分可能であることが証明された．

この後は，曲線 $C_t\,(b_1 \leqq t \leqq b)$ を $x_t\,(0 \leqq t \leqq b_1)$ に沿ったアファイン平行移動でうつした像を $B_t\,(b_1 \leqq t \leqq b)$ とする．これは x_{b_1} における接空間の 0 から出る曲線である．したがって，ある $\varepsilon > 0$ に対して x_{b_1} から出る M の曲線 $x_t\,(b_1 \leqq t \leqq b_1 + \varepsilon)$ が存在し，その展開が $B_t\,(b_1 \leqq t \leqq b_1 + \varepsilon)$ になっている．ここで $x_t\,(0 \leqq t \leqq b_1 + \varepsilon)$ は無限回微分可能であり，その展開が $C_t\,(0 \leqq t \leqq b_1 + \varepsilon)$ になっていることがわかる．これは b_1 の定義に反する．これで $b_1 = b$ であることが証明できた．

リーマン多様体の完備性について，さらにいくつかの事柄を証明なしにのべておこう．

定理1からわかることは，リーマン多様体 M がコンパクトならば，完備であることである．またリーマン多様体 M は，任意の2点 x, y に対し x を y にうつすような M の等長変換が存在するとき **等質** (homogeneous) といわれる．M が等質ならば完備である．このことは，たとえば M の距離関数が等長変換で不変であること，したがって等質ならばすべての点 x に対して $\{y \in M;\ d(x, y) \leqq r\}$ が完閉であるような $r > 0$ がとれる．このことから距離空間 (M, d) が完備であることがわかる．

問 d が等長変換で不変なことを証明せよ．

リーマン多様体 (M, g) のベクトル場 X は，それが各点の近傍で生成する局所的1助変数局所変換群 φ_t のそれぞれが等長的であるとき，**無限小等長変換** (infinitesimal isometry) または**キリング・ベクトル場** (Killing vector

field) とよばれる．この定義の条件 $(\varphi_t{}^*g)(Y,Z)$ すなわち $g(\varphi_t Y, \varphi_t Z)$ が $g(Y,Z)$ に等しい（ここで Y,Z は任意の点での接ベクトル，または φ_t の定義域でのベクトル場）という式を微分して

$$(4)\qquad Xg(Y,Z)=g([X,Y],Z)+g(Y,[X,Z])$$

が得られる．(4) がすべてのベクトル場 Y,Z に対して成り立つことが，X が無限小等長変換であるための必要かつ十分な条件である．

問 このことを厳密に証明せよ．

さて，M が完備ならば任意の無限小等長変換 X は，実は M 全体の上での1助変数等長変換群 $\varphi_t\,(-\infty<t<\infty)$ を生成することが知られている．

リーマン多様体 M が完備であるとする．もし M の断面曲率 K が，ある $c>0$ に対してすべての点のすべての平面 σ について $K(\sigma)\geqq c$ という条件をみたすならば，M はコンパクトでかつその基本群は有限であることが知られている（マイヤース (Myers) の定理)．一方，M が単連結完備ですべての σ に対して $K(\sigma)\leqq 0$ ならば，M はユークリッド空間と微分同相になる．

完備性はこのように計量の大切な性質であるが，それだけでは多様体に対する何の制約にもならない．すなわち，多様体 M の任意のリーマン計量 g に対してこれと共形的な計量 $g'=\varphi^2 g$（φ は正の微分可能関数）で完備なものが存在する．また，共形的な計量 $g''=\psi^2 g$（ψ も正の関数）でそれに対する距離関数が有界であるものも存在する．この二つの事実から，多様体 M 上の任意のリーマン計量が完備であるための必要かつ十分な条件は，M がコンパクトであることがわかる．

§9. 共形ワイル・テンソル

多様体 M のリーマン計量 g の**共形変形** (conformal change) とは，M 上の正値微分可能関数 φ により，新しいリーマン計量

$$(1)\qquad g'=\varphi^2 g$$

を作ることである．このとき g と g' とは**共形的** (conformal) であるという．

リーマン計量 g を共形変形したとき，対応するレビ・チビタ接続 ∇ と ∇' とはどのように関係しているか，また曲率テンソル R と R' とは，どのように関

係しているかを調べよう．その後で，各計量 g に対し**共形ワイル・テンソル場**(conformal Weyl tensor field) とよばれるものを定義し，このテンソルは共形変形によって不変であることを示そう．

まず

$$K(X, Y) = \nabla_X' Y - \nabla_X Y \tag{2}$$

とおくと K は (1,2) 型のテンソル場である．ここで

$$K(X)Y = K(X, Y) \tag{3}$$

とかきかえると，各ベクトル X に対して $K(X)$ は (1,1) 型のテンソルである．

$\nabla_X' g' = 0$ と $\nabla_X g = 0$ の両方を用いて

$$g(K(X)Y, Z) + g(Y, K(X)Z) = 2\alpha(X)g(Y, Z) \tag{4}$$

ここで α は

$$\alpha = d(\log \varphi) \tag{5}$$

できまる1次微分形式である．(4) で X, Y, Z をとりかえて

$$g(K(Y)X, Z) + g(X, K(Y)Z) = 2\alpha(Y)g(X, Z) \tag{4'}$$

$$g(K(Z)X, Y) + g(X, K(Z)Y) = 2\alpha(Z)g(X, Y) \tag{4''}$$

(4) + (4′) − (4″) を作り $K(X)Y = K(Y)X$ に注意すると

$$g(K(X)Y, Z) = \alpha(X)g(Y, Z) + \alpha(Y)g(X, Z) - \alpha(Z)g(X, Y) \tag{6}$$

が得られる．α に対応するベクトル場を U とかく．すなわち

$$\alpha(Y) = g(Y, U)$$

がすべてのベクトル Y に対して成り立つ．このとき

$$\begin{aligned}
&\alpha(Y)g(X, Z) - \alpha(Z)g(X, Y)\\
&\qquad = g(Y, U)g(X, Z) - g(Z, U)g(X, Y)\\
&\qquad = g(g(Y, U)X - g(Y, X)U, Z)\\
&\qquad = g((X \wedge U)Y, Z)
\end{aligned}$$

とかける．ここで $X \wedge U$ は §3 で導入した記号である．(6) から

$$K(X) = \alpha(X)I + X \wedge U \tag{7}$$

$$K(X)Y = \alpha(X)Y + \alpha(Y)X - g(X, Y)U \tag{7'}$$

を得る．

次に，g の曲率テンソル R と g' の曲率テンソル R' との関係を求めよう．任意のベクトル場 X, Y, Z に対して

$$\nabla'_X\nabla'_Y Z=(\nabla_X+K(X))(\nabla_Y+K(Y))Z$$

を (7′) をくり返して用いることにより展開し，さらに

$$\nabla'_X\nabla'_Y Z-\nabla'_Y\nabla'_X Z-\nabla'_{[X,Y]}Z$$

を計算することによって（$(\nabla_X\alpha)(Y)=(\nabla_Y\alpha)(X)$ に注意して）

$$\begin{aligned}R'(X,Y)Z=R(X,Y)Z&+(\nabla_X\alpha)(Z)Y+\alpha(Y)\alpha(Z)X\\&-g(Y,Z)\alpha(U)X+g(Y,Z)\alpha(X)U-g(Y,Z)\nabla_X U\\&-(\nabla_Y\alpha)(Z)X-\alpha(X)\alpha(Z)Y+g(X,Z)\alpha(U)Y\\&-g(X,Z)\alpha(Y)U+g(X,Z)\nabla_Y U\end{aligned}\tag{8}$$

が得られる．これを簡略するために

$$\begin{aligned}BX&=-g(X,U)U+\nabla_X U+\frac{1}{2}\alpha(U)X\\&=-\alpha(X)U+\nabla_X U+\frac{1}{2}\alpha(U)X\end{aligned}\tag{9}$$

によって (1,1) 型テンソル場 B を定義すると，(8) の右辺の $R(X,Y)Z$ 以外のすべての項をまとめて

$$-(BX\wedge Y+X\wedge BY)Z$$

とかける．したがって (8) は

$$R'(X,Y)=R(X,Y)-(BX\wedge Y+X\wedge BY)\tag{10}$$

となる．

以上をまとめて

定理 1 リーマン計量の共形変形 $g'=\varphi^2 g$ に対して $\alpha=d(\log\varphi)$，$U=\mathrm{grad}\,(\log\varphi)$ とし，また B を

$$BX=-\alpha(X)U+\nabla_X U+\frac{1}{2}\alpha(U)X$$

で定義される (1,1) 型のテンソル場とする．

g と g' のレビ・チビタ接続 ∇ と ∇' との関係は

$$\nabla'_X-\nabla_X=\alpha(X)I+X\wedge U\tag{11}$$

g と g' の曲率テンソル R と R' との関係は

(12) $$R'(X, Y) = R(X, Y) - (BX \wedge Y + X \wedge BY)$$

g と g' の (0,2) 型リッチ・テンソルの関係は

(13) $$\mathrm{Ric}' = \mathrm{Ric} - (n-2)\beta - (\mathrm{tr}\, B)g$$

ここで，β は B に対応する (0,2) 型テンソル場であり，$\mathrm{tr}\, B$ は B のトレースを表す.

g と g' の (1,1) 型リッチ・テンソルの関係は

(14) $$\varphi^2 \mathrm{Ric}^{*\prime} = \mathrm{Ric}^* - (n-2)B - (\mathrm{tr}\, B)I$$

g と g' のスカラー曲率 ρ と ρ' との関係は

(15) $$\varphi^2\rho' = \rho - 2(n-1)\,\mathrm{tr}\, B$$

問 (12) から (13),(14),(15) を導け.

さて，リーマン計量 g の**共形ワイル・テンソル** (conformal Weyl tensor) を $\dim M \geqq 3$ のとき,

(16) $$\begin{aligned} C(X, Y) = R(X, Y) &- \frac{1}{n-2}(\mathrm{Ric}^*(X) \wedge Y + X \wedge \mathrm{Ric}^*(Y)) \\ &+ \frac{\rho}{(n-1)(n-2)} X \wedge Y \end{aligned}$$

によって定義する．実は，$n=3$ のときは C は恒等的に 0 になる．この事実の証明は後回しにして，まず共形ワイル・テンソルは計量の共形変形によって不変であることを示そう.

定理 2 $g' = \varphi^2 g$ であるとき，g と g' との共形ワイル・テンソル C と C' とは一致する.

[証明] g' に関して一般に

$$\begin{aligned} (X \wedge' Y)(Z) &= g'(Y, Z)X - g'(X, Z)Y \\ &= \varphi^2 g(Y, Z)X - \varphi^2 g(X, Z)Y = \varphi^2(X \wedge Y)(Z) \end{aligned}$$

となるから，(14) により

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}^{*\prime}(X) \wedge' Y &= \frac{1}{\varphi^2}\{\mathrm{Ric}^*(X) \wedge' Y - (n-2)BX \wedge' Y - (\mathrm{tr}\, B)X \wedge' Y\} \\ &= \mathrm{Ric}^*(X) \wedge Y - (n-2)BX \wedge Y - (\mathrm{tr}\, B)X \wedge Y \end{aligned}$$

同様に,

$$X \wedge' \mathrm{Ric}^{*\prime}(Y) = X \wedge \mathrm{Ric}^*(Y) - (n-2)X \wedge BY - (\mathrm{tr}\, B)\, X \wedge Y$$

また (15) により

$$\rho' X \wedge' Y = \frac{\rho - 2(n-1)\operatorname{tr} B}{\varphi^2}\varphi^2 X \wedge Y = (\rho - 2(n-1)\operatorname{tr} B) X \wedge Y$$

となるから，これらを用いて，また (12) により

$$\begin{aligned} C'(X, Y) &= R'(X, Y) - \frac{1}{n-2}(\mathrm{Ric}^{*\prime}(X) \wedge' Y + X \wedge' \mathrm{Ric}^{*\prime}(Y)) \\ &\quad + \frac{\rho'}{(n-1)(n-2)} X \wedge' Y \\ &= R'(X, Y) - \frac{1}{n-2}\{\mathrm{Ric}^*(X) \wedge Y + X \wedge \mathrm{Ric}^*(Y) \\ &\quad - (n-2)BX \wedge Y - (n-2)X \wedge BY - 2\operatorname{tr} B\, X \wedge Y\} \\ &\quad + \frac{\rho - 2(n-1)\operatorname{tr} B}{(n-1)(n-2)} X \wedge Y \\ &= R'(X, Y) + (BX \wedge Y + X \wedge BY) - \frac{1}{n-2}(\mathrm{Ric}^*(X) \wedge Y \\ &\quad + X \wedge \mathrm{Ric}^*(Y)) + \frac{\rho}{(n-1)(n-2)} X \wedge Y \\ &= R(X, Y) - \frac{1}{n-2}(\mathrm{Ric}^*(X) \wedge Y + X \wedge \mathrm{Ric}^*(Y)) \\ &\quad + \frac{\rho}{(n-1)(n-2)} X \wedge Y \\ &= C(X, Y) \end{aligned}$$

を得る．

いま $g' = \varphi^2 g$ で，g' が局所平坦 ($R' = 0$) であるとしよう．このとき明らかに $C' = 0$ だから $C = 0$ でもある．与えられたリーマン計量 g が**共形平坦** (conformally flat) であるとは，各点の近傍で適当な関数 $\varphi > 0$ が存在して $g' = \varphi^2 g$ がそこで平坦であることと定義する．g が共形平坦であれば共形ワイル・テンソル C は 0 である．M の次元が > 3 のときは，この逆に $C = 0$ ならば g は共形平坦であることが知られている．ここではその証明に立ち入らないが，$C = 0$ という条件の下で

$$D(Z, Y) = (\nabla_Z \mathrm{Ric}^*)Y - (\nabla_Y \mathrm{Ric}^*)Z + \frac{1}{2(n-1)}\{(Y\rho)Z - (Z\rho)Y\} \tag{17}$$

によって定義される (1,2) 型テンソル D が 0 であることを導き，$D=0$ ならば $\varphi^2 g$ が平坦であるような関数 φ が局所的に存在することを示すのである．$n=3$ のときは直接 $D=0$ であることが共形平坦であるための十分条件ということになる（文献 Eisenhart の本 92 頁参照）．

共形ワイル・テンソルの構成をもう少し一般的な立場から考えてみよう．

一般に，V を内積 $\langle\ ,\ \rangle$（ここでは正値とするが，実際以下の議論は非退化の場合にも同様にできる）をもつ n 次元実ベクトル空間とする．V 上の**曲率型テンソル** (curvature-like tensor) とは V 上の (1,3) 型テンソル L であって，これを双線形写像

$$(X, Y) \in V \times V \ \rightarrow\ L(X, Y) \in \mathfrak{gl}(V)$$

というように表したとき，条件

$$L(X, Y) = -L(Y, X)$$

$$\langle L(X, Y)Z, W\rangle = -\langle Z, L(X, Y)W\rangle$$

かつ

$$\mathfrak{S}\{L(X, Y)Z\} = 0$$

を満足するものである．このようなテンソル L に対して，そのリッチ・テンソル Ric^*_L は

$$\mathrm{Ric}^*_L(X) = \sum_{i=1}^{n} L(X, E_i)E_i$$

で与えられる．ここで $\{E_1, \cdots, E_n\}$ は V の任意の正規直交基である．Ric^*_L のトレースを L のスカラー曲率とよび ρ_L で表す．V の平面 σ（すなわち 2 次元線形部分空間）に対して，L の断面曲率 $K_L(\sigma)$ も普通の曲率テンソルのときと同様に定義する．

V 上の曲率型テンソル全体の作るベクトル空間を $\mathfrak{L}(V)$ で表す．V の内積を自然に $\mathfrak{L}(V)$ の内積に拡張することができる．K_L が定値関数であるような曲率型テンソル L は

$$L(X, Y) = cX \wedge Y \qquad (c \text{ は定数})$$

という形にかけることは §4 の定理 1 と同様であるが，その全体を $\mathfrak{L}_1(V)$ とする．

$\mathfrak{L}(V)$ の内積に関する $\mathfrak{L}_1(V)$ の直交補空間 $\mathfrak{L}_1{}^{\perp}(V)$ は，スカラー曲率が 0 であるような曲率型テンソル全体と一致する．これを証明するために，V の正規直交基 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ を選び，$L, L' \in \mathfrak{L}(V)$ に対し

$$L(E_k, E_m)E_j = \sum_{i=1}^{n} L^i{}_{jkm} E_i$$

$$L'(E_k, E_m)E_j = \sum_{i=1}^{n} L'^i{}_{jkm} E_i$$

とすると

$$\langle L, L'\rangle = \sum_{i,j,k,m=1}^{n} L^i{}_{jkm} L'^i{}_{jkm}$$

ここで $L'(X, Y) = c(X \wedge Y)$ とすると $L'^i{}_{jkm} = c(\delta^i{}_k \delta_{jm} - \delta_{jk}\delta^i{}_m)$ であるから

$$\langle L, L'\rangle = \sum_{i,j,k,m=1}^{n} cL^i{}_{jkm}(\delta^i{}_k \delta_{jm} - \delta_{jk}\delta^i{}_m) = 2c \sum_{i,j=1}^{n} L^i{}_{jij} = 2c\rho_L$$

したがって $\langle L, L'\rangle = 0$ がすべての c に対して成り立つのは $\rho_L = 0$ のときそのときに限る．

さて，リッチ・テンソル $\mathrm{Ric}^*{}_L = 0$ となるような曲率型テンソル L の全体を $\mathfrak{L}_w(V)$ とすると，$\mathfrak{L}_w(V) \subset \mathfrak{L}_1{}^{\perp}(V)$ となる．$\mathfrak{L}_w(V)$ の中での $\mathfrak{L}_w(V)$ の直交補空間を $\mathfrak{L}_2(V)$ とかくことによって，

$$\mathfrak{L}(V) = \mathfrak{L}_1(V) \oplus \mathfrak{L}_w(V) \oplus \mathfrak{L}_2(V) \qquad \text{(直交直和)} \tag{18}$$

となる．

この分解 (18) に関して任意の $L \in \mathfrak{L}(V)$ を

$$L = L_1 + L_w + L_2, \qquad L_1 \in \mathfrak{L}_1(V), L_w \in \mathfrak{L}_w(V), L_2 \in \mathfrak{L}_2(V)$$

とかくと

$$L_1(X, Y) = \frac{\rho_L}{n(n-1)} X \wedge Y$$

$$L_2(X, Y) = \frac{1}{n-2}\left\{\mathrm{Ric}^*{}_L(X) \wedge Y + X \wedge \mathrm{Ric}^*{}_L(Y) - \frac{2\rho}{n} X \wedge Y\right\} \tag{19}$$

$$L_w(X, Y) = L(X, Y) - \frac{1}{n-2}\{\mathrm{Ric}^*{}_L(X) \wedge Y + X \wedge \mathrm{Ric}^*{}_L(Y)\}$$
$$+ \frac{\rho}{(n-1)(n-2)} X \wedge Y$$

となる．ただし $n \geqq 3$ としておく．

問　上の (19) を確かめよ．

L_w を曲率型テンソル L の**ワイル・テンソル**とよぶ．L_w のリッチ・テンソルは 0 である．

前に，リーマン多様体が 3 次元のときは共形ワイル・テンソルはつねに 0 であることをのべたが，ここでその証明をしておこう．より一般に次のことを証明する．

定理 3　V の次元が 3 のとき，曲率型テンソル L のリッチ・テンソルが 0 ならば $L=0$ である．

［**証明**］ L の断面曲率 K_L が恒等的に 0 に等しいことをいえばよい．V の任意の平面 σ に対して V の正規直交基 $\{E_1, E_2, E_3\}$ をとり，σ が E_1, E_2 で張られているとする．§4 の式 (6) により，E_i, E_j で張られる平面の断面曲率を K_{ij} とかけば

$$K_{12} + K_{13} = K_{21} + K_{23} = K_{31} + K_{32} = 0$$

これから $K_{12} = K_{13} = K_{23} = 0$ すなわち $K_L(\sigma) = 0$ を得る．

この証明を少し修正すれば，次の定理が得られる．

定理 4　3 次元リーマン多様体がアインシュタイン空間ならば，それは定曲率である．

問　この定理を証明せよ．

この節でのべたことは，ローレンツ計量のときにもそのまま成り立つ．

§10. 部分多様体の幾何，例 $SO(n)$

§3 ではユークリッド空間 E^{n+1} の超曲面 M^n の幾何の基本的なとり扱い方をのべたが，これを一般にして定曲率リーマン多様体 $\tilde{M}$ の部分多様体 M の幾何をとり扱う．

$(\tilde{M}, \tilde{g})$ を $(n+p)$ 次元の定曲率リーマン多様体，f を n 次元多様体 M

の $\tilde{M}$ へのはめこみとし，f によって $\tilde{g}$ から M の上に誘導されたリーマン計量を g とする．あるいは，初めからリーマン多様体 (M,g) が与えられていてはめこみ f が等長的 (isometric) である：

$$\tilde{g}(f_*X, f_*Y)=g(X,Y)$$

と仮定しても同じことである．M の各点 x に対して $f_*(T_x(M))$ は $T_{f(x)}(\tilde{M})$ の部分空間であるが，その $\tilde{g}$ に関する直交補空間を**法空間** (normal space) とよび N_x で記すと

$$(1) \qquad T_{f(x)}(\tilde{M})=f_*(T_x(M))\oplus N_x \qquad (\text{直交直和})$$

となる．ここで N_x の次元は p で，

$$(2) \qquad N_f=\bigcup_{x\in M} N_x$$

を M の上のベクトル束と考えることができる．これを M の（または M のうめこみ f の）**法束** (normal bundle) という．ファイバーはベクトル空間 R^p であり，各点 x の上のファイバーである法空間には自然な内積がきまっている（すなわち $\tilde{g}_x$ の N_x への制限)．

以下 $X, Y, \cdots$ を M 上のベクトル場とする．$\tilde{M}$ のレビ・チビタ接続 $\tilde{\nabla}$ から f に沿うベクトル場の共変微分演算が定義できるから，§3 と同じように，分解 (1) により

$$(3) \qquad \tilde{\nabla}_X f_*(Y)=f_*(\nabla_X Y)+\alpha(X,Y)$$

とかくことにすると，$\nabla_X Y$ は M の計量 g に対するレビ・チビタ接続であること，α は M の各点 x における双線形写像 $\alpha_x : T_x(M)\times T_x(M)\to N_x$ をひきおこし，かつ $\alpha_x(Y,X)=\alpha_x(X,Y)$ であることが，大した困難なしに確かめられる．この α のことを f の**第2基本テンソル** (second fundamental tensor) とよぶ．

一方，ξ を任意の法ベクトル場（すなわち f に沿うベクトル場 ξ で $\xi_x\in N_x$ となるもの）とし，分解 (1) により

$$(4) \qquad \tilde{\nabla}_X\xi=f_*(-A_\xi X)+\nabla^{\perp}{}_X\xi$$

とかく．ここで $A_\xi X$ は ξ と X とに依存する M 上のベクトル場，$\nabla^{\perp}{}_X\xi$ は ξ と X に依存する法ベクトル場である（超曲面のときは ξ を単位法ベクトル場

としたが，いまの場合は任意の法ベクトル場としておく．たとえ $\tilde{g}(\xi,\xi)=1$ としても $\tilde{\nabla}_X\xi$ は M に直交するとは限らない）．この式（4）から次のことがわかる．

M から N_f への切り口の全体 Sec (N_f)（すなわち M の法ベクトル場の全体）を考える．

$$(X,\xi)\in\mathfrak{X}(M)\times \mathrm{Sec}\,(N_f)\to A_\xi(X)\in\mathfrak{X}(M)$$

という写像は M 上の微分可能関数に関して双線形である．このことからこの写像は M の各点 x で

（5） $$(X,\xi)\in T_x(M)\times N_x\to A_\xi(X)\in N_x$$

という双線形写像をひきおこす．いま $\xi\in N_x$ を固定すると $T_x(M)$ の線形変換 $X\to A_\xi(X)$ が得られるが，これを ξ に対応する**形作用素**（shape operator）とよぶ．第2基本テンソルとの関係は

（6） $$g(A_\xi(X),Y)=\tilde{g}(\alpha(X,Y),\xi),\qquad X,Y\in T_x(M),\xi\in N_x$$

によって与えられる．

さらに（4）からわかることは，写像

（7） $$(X,\xi)\in\mathfrak{X}(M)\times \mathrm{Sec}\,(N_f)\to\nabla^{\perp}{}_X\xi\in \mathrm{Sec}\,(N_f)$$

がベクトル束 N_f の線形接続を与えていること，すなわち

$$\nabla^{\perp}{}_{X+Y}\xi=\nabla^{\perp}{}_X\xi+\nabla^{\perp}{}_Y\xi$$
$$\nabla^{\perp}{}_{\varphi X}\xi=\varphi\nabla^{\perp}{}_X\xi$$
$$\nabla^{\perp}{}_X(\xi+\eta)=\nabla^{\perp}{}_X\xi+\nabla^{\perp}{}_X\eta$$
$$\nabla^{\perp}{}_X(\varphi\xi)=(X\varphi)\xi+\varphi\nabla^{\perp}{}_X\xi$$

ただし，ここで $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, $\xi,\eta\in$ Sec (N_f), φ は M 上の微分可能関数である．さらにこの線形接続 $\nabla^{\perp}$ は N_f のファイバー計量に関して計量的である．すなわち

（8） $$X\tilde{g}(\xi,\eta)=\tilde{g}(\nabla^{\perp}{}_X\xi,\eta)+\tilde{g}(\xi,\nabla^{\perp}{}_X\eta)$$

が任意の $\xi,\eta\in$ Sec (N_f), $X\in\mathfrak{X}(M)$ に対して成り立つ．この接続 $\nabla^{\perp}$ を M の（あるいは，はめこみ f の）**法接続**（normal connection）とよぶ．

以上のべた事柄の証明は省略するが，超曲面のときには法接続は考える必要がないことになる．

超曲面のときのガウスの方程式，コダッチの方程式はそれぞれ次のように拡張される．

ガウスの方程式　$\tilde{M}$ の定曲率を c とする．M の点 x で N_x の正規直交基を $\{\xi_1, \cdots, \xi_p\}$ とし，各 ξ_i に対応する形作用素を A_i とかくと，M の曲率テンソル R は

$$R(X, Y) = cX \wedge Y + \sum_{i=1}^{p} A_i X \wedge A_i Y \tag{9}$$

で表される．これが超曲面のときの公式 §3 (13) の拡張であることはみやすい．

問　(9) を導け．

いま X, Y が正規直交であるとして，それらが張る平面 σ に対する（M の）断面曲率 $K(\sigma)$ を (9) から計算してみると

$$K(\sigma) = c + \sum_{i=1}^{p} \{g(A_i X, X) g(A_i Y, Y) - g(A_i X, Y)^2\}$$

となる．右辺において

$$\sum_{i=1}^{p} g(A_i X, X) g(A_i Y, Y) = \sum_{i=1}^{p} \tilde{g}(\alpha(X, X), \xi_i) \tilde{g}(\alpha(Y, Y), \xi_i)$$
$$= \tilde{g}(\alpha(X, X), \alpha(Y, Y))$$

$$\sum_{i=1}^{p} g(A_i X, Y)^2 = \sum_{i=1}^{p} \tilde{g}(\alpha(X, Y), \xi_i)^2 = \tilde{g}(\alpha(X, Y), \alpha(X, Y))$$

であることに注意すれば

$$K(\sigma) = c + \tilde{g}(\alpha(X, X), \alpha(Y, Y)) - \tilde{g}(\alpha(X, Y), \alpha(X, Y)) \tag{10}$$

が得られる．

コダッチの方程式　第２基本テンソル場 α の共変微分 $\nabla^*{}_X \alpha$ を，$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$(\nabla^*{}_X \alpha)(Y, Z) = \nabla^{\perp}{}_X \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) \tag{11}$$

とおくことによって定義する．M の点 x で $X \in T_x(M)$ をきめたとき

$$(Y, Z) \in T_x(M) \times T_x(M) \quad \to \quad (\nabla^*{}_X \alpha)(Y, Z) \in N_x$$

という双線形写像が得られ，$(\nabla^*{}_X \alpha)(Z, Y) = (\nabla^*{}_X \alpha)(Y, Z)$ である．コダッチの方程式は

(12) $$(\nabla^*{}_X\alpha)(Y,Z)=(\nabla^*{}_Y\alpha)(X,Z)$$

である．これは，超曲面のときの §3 (14) の拡張になっている．

問 (12) を導け．

問 (11) の $\nabla^*{}_X$ は適当なベクトル束の切り口に対する共変微分演算と考えられることを示せ．

余次元 p が1より大きい場合にはすでにのべたように法束 N_f の法接続が得られるが，その曲率テンソルすなわち**法曲率テンソル** (normal curvature tensor)

(13) $$R^\perp(X,Y)=[\nabla^\perp{}_X,\nabla^\perp{}_Y]-\nabla^\perp{}_{[X,Y]}$$

は M の各点 x における法空間 N_x の歪対称線形変換である．これを形作用素によって表現するのが次のリッチの方程式である．

(14) $$\tilde{g}(R^\perp(X,Y)\xi,\eta)=g([A_\xi,A_\eta]X,Y)$$

ここで $X,Y\in T_x(M)$, $\xi,\eta\in N_x$ である．

問 (14) を導き出せ．

部分多様体に対する基本公式は以上であるが，興味のある例として回転群 $SO(n)$ の幾何を論じよう．

まず n 次実行列全体の作るベクトル空間 $\mathfrak{gl}(n,R)$ に，

(15) $$\langle X,Y\rangle=\mathrm{tr}\,({}^tXY)$$

によって正値内積を定義する．ここで ${}^tX$ は X の転置行列を表す．$X=[x^i{}_j]$, $Y=[y^i{}_j]$ とすると

$$\langle X,Y\rangle=\sum_{i,j=1}^n x^i{}_jy^i{}_j$$

であるから，この内積をもつ $\mathfrak{gl}(n,R)$ は，標準内積をもつユークリッド空間 E^{n^2} と同一視することができる．

回転群

$$SO(n)=\{A\in\mathfrak{gl}(n,R),\ A{}^tA={}^tAA=I_n,\ \det A=1\}$$

を $n(n-1)/2$ 次元の，$\mathfrak{gl}(n,R)$ の部分多様体と考えてその誘導されたリーマン計量を g とかく．この計量 g は $SO(n)$ の上で両側不変，すなわち $SO(n)$

の左移動 $X\to AX$, 右移動 $X\to XA$ によって不変である．これをみるためにもう少し一般に $\mathfrak{gl}(n, R)$ のユークリッド計量自身が変換 $X\to AX$ および $X\to XA$ $(A\in SO(n))$ によって不変であることを示そう． $X, Y\in\mathfrak{gl}(n,R)$ を $\mathfrak{gl}(n,R)$ の任意の点での接ベクトルと考えて，

$$\begin{aligned}\langle AX, AY\rangle &= \mathrm{tr}\,({}^t(AX)AY) = \mathrm{tr}\,({}^tX{}^tAAY)\\ &= \mathrm{tr}\,({}^tXY) = \langle X, Y\rangle\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\langle XA, YA\rangle &= \mathrm{tr}\,({}^t(XA)YA) = \mathrm{tr}\,({}^tA{}^tXYA)\\ &= \mathrm{tr}\,(A^{-1}{}^tXYA) = \mathrm{tr}({}^tXY) = \langle X, Y\rangle\end{aligned}$$

となる．これで A による左移動および右移動がユークリッド空間 $\mathfrak{gl}(n,R)$ の等長変換であることがわかった． $A\in SO(n)$ だから，これらの変換は $SO(n)$ をそれ自身にうつす $SO(n)$ の等長変換である．

単位行列 I_n での $SO(n)$ の接空間は $SO(n)$ のリー環と同一視でき，それは n 次歪対称実行列の全体

$$\mathfrak{o}(n) = \{X\in\mathfrak{gl}(n,R),\ {}^tX = -X\}$$

である．他方，n 次対称実行列の全体を

$$\mathfrak{s}(n) = \{X\in\mathfrak{gl}(n,R),\ {}^tX = X\}$$

で表す． I_n での $\mathfrak{gl}(n,R)$ の接空間は $\mathfrak{gl}(n,R)$ 自身と同一視できて

$$\mathfrak{gl}(n,R) = \mathfrak{o}(n)\oplus\mathfrak{s}(n) \tag{16}$$

は内積 (15) に関して，直交直和であることが容易にわかる．すなわち $\mathfrak{s}(n)$ は I_n における法空間である． $SO(n)$ の任意の点 A においては

$$T_A(\mathfrak{gl}(n,R)) = \mathfrak{gl}(n,R) = A\cdot\mathfrak{o}(n)\oplus A\cdot\mathfrak{s}(n) \tag{16'}$$

が接空間と法空間との直和分解を与えている．

$X\in\mathfrak{o}(n)$ によって生成される 1 助変数部分群 $A_s=\exp sX$ を考えよう．その接ベクトルは

$$\frac{dA}{ds} = A_sX$$

であるから，ユークリッド空間 $\mathfrak{gl}(n,R)$ での接ベクトルの A_s 自身に沿う共変微分は

$$\frac{d^2A}{ds^2}=\frac{dA}{ds}X=A_sX^2$$

で与えられる．ここで $X^2\in\mathfrak{s}(n)$ であるから右辺は点 A_s における法空間に属することになり，したがって

$$\alpha\left(\frac{dA}{ds},\frac{dA}{ds}\right)=A_s(X^2) \tag{17}$$

$$\nabla_s\left(\frac{dA}{ds}\right)=0 \tag{18}$$

が得られる．ここで ∇_s は $SO(n)$ のレビ・チビタ接続による A_s に沿う共変微分である．

(18) は A_s が $SO(n)$ の測地線であることを示している． $X\in\mathfrak{o}(n)$ を初期接ベクトルとする I_n からの測地線は1助変数部分群 $\exp sA$ で与えられることになる．$SO(n)$ の任意の測地線は 1 助変数部分群の左移動による像（かつ右移動による像）である．

(17) において $s=0$ とおくと

$$\alpha(X,X)=X^2 \tag{17'}$$

が得られる．双線形写像に対する極化恒等式を使って

$$\alpha(X,Y)=\frac{1}{2}(XY+YX) \tag{17''}$$

が得られる．これが第2基本テンソルの I_n における表現である．前にのべたように $A\in SO(n)$ による $\mathfrak{gl}(n,R)$ の左移動（また右移動）は $SO(n)$ をそれ自身にうつす等長変換であるから，I_n における第2基本テンソル α を A における第2基本テンソル α に変換する．すなわち

$$\alpha_A(AX,AY)=\frac{1}{2}A(XY+YX),\qquad X,Y\in\mathfrak{o}(n)$$

となる．

問 上の関係を確かめよ．

I_n における α の表現から，任意の法ベクトル $\xi\in\mathfrak{s}(n)$ に対応する形作用素 A_ξ が次のように求まる．

$$A_\xi(X)=-\frac{1}{2}(X\xi+\xi X),\qquad X\in\mathfrak{o}(n) \tag{19}$$

問 (17″) から (18) を導け．

(18) を $s=0$ で評価すると X を左不変ベクトル場と考えて

$$(18')\qquad \nabla_X X=0$$

を得る．$X, Y\in \mathfrak{o}(n)$ を左不変ベクトル場と考えると，

$$\nabla_{X+Y}(X+Y)=\nabla_X X+\nabla_X Y+\nabla_Y X+\nabla_Y Y$$

から

$$\nabla_X Y+\nabla_Y X=0$$

一方，捩率テンソルが 0 ということから

$$\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X, Y]$$

したがって

$$(18'')\qquad \nabla_X Y=\frac{1}{2}[X, Y]=\frac{1}{2}\operatorname{ad}(X)Y$$

が得られる．

(18″) から $SO(n)$ の曲率テンソル場 R が容易に求まる．リーマン計量が両側不変であるから，R 自身両側不変，したがって I_n における値を知れば十分である．(18″) から

$$R(X, Y)=[\nabla_X, \nabla_Y]-\nabla_{[X,Y]}$$
$$=\frac{1}{4}[\operatorname{ad}(X), \operatorname{ad}(Y)]-\frac{1}{2}\operatorname{ad}([X, Y])=-\frac{1}{4}\operatorname{ad}([X, Y])$$

したがって

$$(20)\qquad R(X, Y)=-\frac{1}{4}\operatorname{ad}([X, Y])$$

これから

$$(20')\qquad g(R(X, Y)Y, X)=\frac{1}{4}g([X, Y], [X, Y])$$

が得られる．(20′) は $SO(n)$ の断面曲率がつねに非負であることを示している．

問 (20) から (20′) を導け．

また (20) から共変導テンソル ∇R が 0 になることが証明できる．§7 でのべた意味で $SO(n)$ は局所対称ということになる．実際，$SO(n)$ がユークリッ

ド空間の部分多様体であるという立場からは，次のような事情が興味深いのである．

ユークリッド空間 $\mathfrak{gl}(n, R)$ の変換 $A \to {}^tA$ を σ とかくと，これが等長的であることはほとんど明らかである．$SO(n)$ は σ によってそれ自身にうつり，特に $\sigma(I_n) = I_n$，I_n での接空間 $\mathfrak{o}(n)$ の上での σ の微分は $\sigma(X) = {}^tX = -X$ で与えられる．したがって σ の $SO(n)$ への制限は，I_n に関する対称 (symmetry) を与えていることになる．

一方，σ は I_n における法空間 $\mathfrak{s}(n)$ の上で恒等変換である．σ は $\mathfrak{gl}(n, R)$ 全体の等長変換であるから，第 2 基本テンソル場 α やその共変導テンソル場 $\nabla^*\alpha$ を不変にする．I_n で $X, Y, Z \in \mathfrak{o}(n)$ に対して

$$(\nabla^*{}_{\sigma X})\alpha(\sigma Y, \sigma Z) = \sigma((\nabla^*{}_X\alpha)(Y, Z))$$

から

$$(\nabla^*{}_{-X}\alpha)(-Y, -Z) = (\nabla^*{}_X\alpha)(Y, Z)$$

したがって $(\nabla^*{}_X\alpha)(Y, Z) = 0$，すなわち $\nabla^*\alpha = 0$ となる．これはもちろん $SO(n)$ 全体で成り立つ．

ここでのべた $SO(n)$ の部分多様体としての性質を一般化すると次のようになる．

ユークリッド空間 E^{n+p} の部分多様体 M^n が**対称部分多様体** (symmetric submanifold) であるというのは，M^n の各点 x に対して E^{n+p} の x を固定する等長変換 σ で M^n を M^n にうつし，その微分 σ_* が

$$\begin{cases} \sigma_*(X) = -X, & X \in T_x(M^n) \text{ に対して} \\ \sigma_*(\xi) = \xi, & \xi \in N_x(M^n) \text{ に対して} \end{cases}$$

となるもの（対称）が存在することである．このような σ が各点 x に対しそのある近傍 U 上で存在するときは，M^n を**局所対称部分多様体** (locally symmetric submanifold) とよぶ．

部分多様体がこの意味で局所対称的であるための必要かつ十分な条件は，$\nabla^*\alpha = 0$ が各点で成り立つことである．このような部分多様体は D. Ferus によって研究された．その論文は D. Ferus: Symmetric submanifolds of Eucli-

dean space, Math. Ann. 247 (1980), 81–93.

問 $SO(n)$ の各点 A に対し，それを固定する $\mathfrak{gl}(n, R)$ の対称 σ を求めよ（$A = I_n$ の場合は $\sigma(X) = {}^tX$ である）.

5 ローレンツ幾何学

特殊相対性理論で重要なミンコウスキー時空を拡張した概念であるところのローレンツ内積の話（特に，逆向きのコーシー・シュワルツの不等式）から始めて，一般相対性理論で不可欠なローレンツ多様体に関する基本的な事柄（断面曲率やリッチ・テンソルに関する特有の事柄，時間的曲線，時間的向きづけの概念）を論じた後，定曲率ローレンツ多様体の例，測地線をとり扱う．特に，特殊線形群 $SL(2,R)$ の両側不変ローレンツ計量を論じる．

第4章 §7, §9 でのべたことはほとんどそのままローレンツ幾何学においても成り立つことに注意しておこう．

§1. ローレンツ内積

アインシュタイン（Einstein）があとで特殊相対性理論とよばれるようになった理論を発表したのは 1905 年であるが，それにひきつづいてミンコウスキー（Minkowski）が「空間と時間」という講演 (1908) において $c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$ という計量をもつ4次元時空（spacetime）を導入した． 我々は一般に，n 次元実ベクトル空間のローレンツ内積，さらにもっと一般な任意の非退化内積の性質を論じることから始めよう．

V を n 次元実ベクトル空間とする．V の上の双線形関数（bilinear function)，すなわち

$$(x,y)\in V\times V \ \rightarrow\ f(x,y)\in R$$

という関数で x を固定したとき y について線形，y を固定したとき x について線形であるものを考える．このとき次の定理が成り立つ．

定理 1　V 上の与えられた双線形関数 f に対して次のような性質をもつ基 $\{a_1,\cdots,a_p,a_{p+1},\cdots,a_{p+q},a_{p+q+1},\cdots,a_n\}$ が存在する：

(i)　$i\neq j$ ならば $f(a_i,a_j)=0$

(ii) $1 \leqq i \leqq p$ ならば $f(a_i, a_i) = 1$

(iii) $p+1 \leqq j \leqq p+q$ ならば $f(a_j, a_j) = -1$

(iv) $p+q+1 \leqq k \leqq n$ ならば $f(a_k, a_k) = 0$

ここで整数 $p \geqq 0$, $q \geqq 0$ はfによって一意的に定まる.

証明は，たとえば本選書 12，野水克己：線形代数学の基礎（上），第4章を参照.

fが**非退化** (non-degenerate) というのは，$f(x, y) = 0$ がすべての $y \in V$ に成り立てば $x = 0$ という条件がみたされていることである．上の定理から f が非退化であるためには，$p+q$ が V の次元 n に等しいことが必要かつ十分であることがわかる．今後は，非退化な双線形関数だけを考えることにしてそれを**内積** (inner product) とよび，$f(x, y)$ とかく代わりに $\langle x, y \rangle$ とかくことにする.

内積 $\langle x, y \rangle$ に対して，定理によって一意的にきまる整数 (p, q) $(0 \leqq p, q, p+q = n)$ の組を内積の**符号数** (signature) とよぶ．内積が**正値** (positive-definite) というのは $\langle x, x \rangle \geqq 0$ がすべての $x \in V$ に対して成り立ち，かつ $\langle x, x \rangle = 0$ となるのは $x = 0$ のときに限ることである．内積が正値であるのは符号数が $(0, n)$ であるということと同値である.

符号数が $(1, n-1)$ である内積のことを**ローレンツ内積** (Lorentzian inner product) とよぶ.

例 n 個の実数の組 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 全体の作る標準 n 次元実ベクトル空間 R^n において，$0 \leqq p \leqq n$ という各整数 p に対して内積

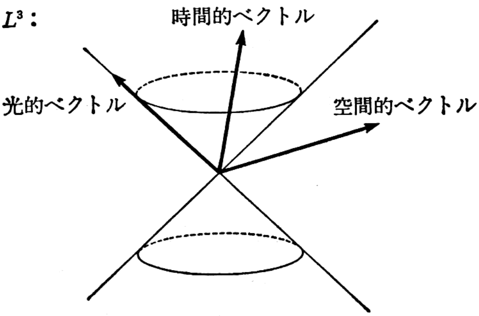
$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{j=p+1}^{n} x_j y_j$$

は符号数 (p, q) をもつ．特に R^n にローレンツ内積

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n$$

を与えたとき，これを**ローレンツ空間** (Lorentzian space) とよび L^n で表す．特に $n = 4$ のときは**ミンコウスキー空間** (Minkowski space) とよばれる．$\{x_1, \cdots, x_n\}$ を**ローレンツ座標系** (Lorentzian coordinate system) という.

以下においてのべる事柄の大体は符号数 (p, q) が $q \geqq 1$ である任意の内積について成り立つのであるが，一番応用上重要であるローレンツ内積に限ってのべることにしよう．

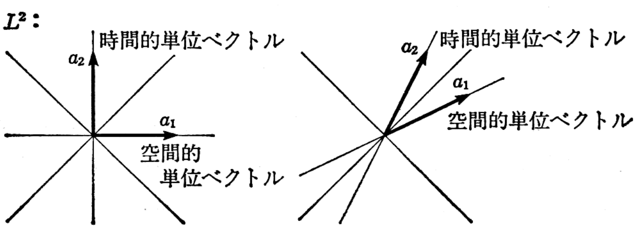


5-1 図

n 次元ベクトル空間 V にローレンツ内積が与えられているとしよう．ベクトル $x \neq 0 \in V$ は $\langle x, x\rangle$ が正，負，0 であるにしたがってそれぞれ**空間的** (spacelike)，**時間的** (timelike)，**光的** (lightlike) であるという．光的という代わりに**零的** (null) ということも多い．時間的または零的なベクトルを**因果的** (causal) という． 光的ベクトルの全体を**光錐** (lightcone) という (5-1 図).

空間的ベクトル x に対しては $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$，時間的ベクトル x に対しては $\|x\| = \sqrt{-\langle x, x\rangle}$ とおいて，これを x の**長さ** (length) または**ノルム** (norm) という．$\|x\| = 1$ のとき x を**単位ベクトル**という．零的ベクトルに対してはもちろん $\|x\| = 0$ と考える．

定理1によると，V には $\langle a_1, a_1\rangle = \cdots = \langle a_{n-1}, a_{n-1}\rangle = 1$, $\langle a_n, a_n\rangle = -1$，かつ $i \neq j$ に対しては $\langle a_i, a_j\rangle = 0$ となる基 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ がとれる．そのような基を**ローレンツ正規直交基** (Lorentzian orthonormal basis) または簡単に**ローレンツ基** (Lorentzian basis) という．任意の空間的単位ベクトル（または時間的単位ベクトル）x が与えられたとき，$a_1 = x$（または



5-2 図

$a_n = x$) となるようなローレンツ基 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ をとることができる(5-2図).

問　この事実を確かめよ.

さて e を時間的単位ベクトルとしたとき,

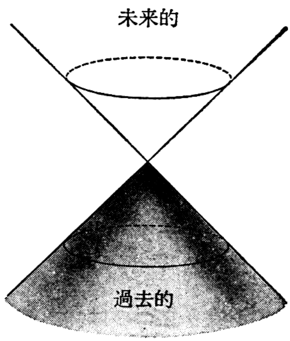
(1)
$$T^+ = \{x \in V;\ \langle x, x\rangle \leqq 0,\ \langle x, e\rangle < 0\}$$
$$T^- = \{x \in V;\ \langle x, x\rangle \leqq 0,\ \langle x, e\rangle > 0\}$$

とおき, T^+ の元を e に関して**未来的**(future-pointing), T^- の元を e に関して**過去的**(past-pointing) とよぶ.

たとえば, L^n をとり $e = (0, \cdots, 0, 1)$ とすれば, $x = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ が因果的ベクトルであるとは

$$\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_n^2 \leqq 0$$

であり, それが未来的とは $\langle x, e\rangle = -x_n < 0$ すなわち $x_n > 0$ であること, 過去的とは $x_n < 0$ であることである. L^n に対してはこれをもって自然な定義とする (5-3 図).



5-3 図

ローレンツ内積に関して興味のある二, 三の不等式を証明しよう. まず

定理 2　x が時間的ベクトルであれば, 任意のベクトル y に対して

(2)　$\langle x, y\rangle^2 \geqq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$

ここで等式が成り立つのは, あるスカラー λ に関して $y = \lambda x$ となるときかつそのときに限る.

注意　正値の内積についてよく知られているコーシー・シュワルツの不等式 (Cauchy-Schwarz's inequality) は

$$\langle x, y\rangle^2 \leqq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

(したがって, $|\langle x, y\rangle| \leqq \|x\|\|y\|$) ということである.

[証明]　x が単位ベクトルであると仮定してもよいから $x = a_n$ となるようなローレンツ基 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ をとる. 与えられた任意の y を $y = \sum_{i=1}^{n} y_i a_i$ とかくと

$$\langle x, y\rangle = -y_n \qquad したがって \qquad \langle x, y\rangle^2 = y_n^2$$

一方

$$\langle x, x\rangle = -1, \qquad \langle y, y\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 - y_n^2$$

だから当然

$$\langle x, y\rangle^2 = y_n^2 \geqq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle = y_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2$$

が得られる．ここで等式が成り立つのは $\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 = 0$ すなわち $y_1 = \cdots = y_{n-1} = 0$ で，$y = y_n a_n$ となるときかつそのときに限る．

注意 x が零的ベクトルのときも任意の y に対して当然 (2) は成り立つ．ただし $\langle x, y\rangle = 0$ でも $y = \lambda x$ とは限らない．下の定理 3 の 1) を参照．

問 ある時間的単位ベクトル e に対して(2)のように T^+, T^- を定義したとき，任意の因果的ベクトルは T^+ か T^- のいずれかに属することを証明せよ．

定理 3 ある時間的単位ベクトル e をきめて，x, y が未来因果的ベクトルとすると

1) $$\langle x, y\rangle \leqq 0$$

等式が成り立つのは，ある正のスカラー λ に対して $y = \lambda x$ で x, y が共に零的ベクトルであるとき，そのときに限る．

2) $x + y$ も未来因果的ベクトルである．

3) $$\|x + y\| \geqq \|x\| + \|y\|$$

等式が成り立つのは，あるスカラー λ に対して $y = \lambda x$ となるときかつそのときに限る．

［証明］ 1) $a_n = e$ となるローレンツ基 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ をとって

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i, \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i a_i$$

とかくと，x, y は未来因果的だから $x_n > 0$，$y_n > 0$ かつ

$$\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_n^2 = -a^2, \qquad \langle y, y\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 - y_n^2 = -b^2$$

ここで $a, b \geqq 0$ である．普通の正値内積をもつ R^{n-1} に対するコーシー・シュワルツの不等式から

（3） $$\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2}$$

ここで右辺は

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2} = \sqrt{x_n^2 - a^2}\sqrt{y_n^2 - b^2} \leqq \sqrt{x_n^2}\sqrt{y_n^2} = x_n y_n$$

となるから，結局

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i \leqq x_n y_n \qquad \text{すなわち} \qquad \langle x, y\rangle \leqq 0$$

が得られる．ここで等式が成り立つのは，$a=b=0$ かつ (3) で等式が成り立つから，あるスカラー λ に対して $y_i = \lambda x_i$ が $1 \leqq i \leqq n-1$ に対して成り立つとき，そのときに限る．そのときは

$$y_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = \lambda^2 x_n^2$$

したがって $y_n = \lambda x_n$ または $y_n = -\lambda x_n$ となる．後者のときは $\lambda < 0$ で

$$\langle x, y\rangle = \lambda \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \lambda x_n^2 = \lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big) < 0$$

となるから除外してよい． 結局 $\langle x, y\rangle = 0$ となるのは $y = \lambda x$ ($\lambda > 0$) で $\langle x, y\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = 0$ から， x がしたがって y も零的ベクトルであるときそのときに限ることがわかる．

2) 1) を用いて

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leqq 0$$

したがって，$x+y$ は因果的ベクトル，$\langle e, x+y\rangle = \langle e, x\rangle + \langle e, y\rangle < 0$ だから未来的である．

3) 定理 2 の不等式 $\langle x, y\rangle^2 \geqq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ を

$$(-\langle x, y\rangle)^2 \geqq (-\langle x, x\rangle)(-\langle y, y\rangle)$$

とかき直して $\langle x, x\rangle \leqq 0, \langle y, y\rangle \leqq 0$，また $\langle x, y\rangle \leqq 0$ であることに注意すると

$$(4) \qquad -\langle x, y\rangle \geqq \|x\|\|y\|$$

が得られる．したがって

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= -\langle x+y, x+y\rangle = -\langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle - \langle y, y\rangle \\ &\geqq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

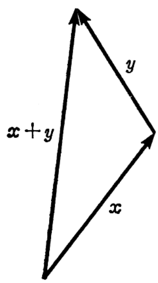
となり

$$\|x+y\| \geqq \|x\| + \|y\|$$

が得られる．ここで等式の成り立つのは (4) で等式が成り立つときで，すなわち $\langle x, y\rangle^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ のときである．x または y が時間的ならば定理 2 によりあるスカラー

λに対して $y=\lambda x$ となる．x, y が共に零点で $\langle x, y\rangle=0$ となるときも，2）の証明でみたように $y=\lambda x$ となる．

注意 $\|x+y\| \geqq \|x\|+\|y\|$ は普通正値内積に対してよく知られている三角不等式の逆向きである（5-4 図）．これが特殊相対性理論でのいわゆる**双子の逆説**（twin paradox）の数学的内容になっていることについて，Sachs, Wu の本（文献）p. 42 をみられたい．



5-4 図

最後にローレンツ群 $O(n-1,1)$ を定義しておこう．ローレンツ空間 L^n の内積

$$\langle x, y\rangle=\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i-x_n y_n$$

に関する直交群，すなわちすべての $x, y \in L^n$ に対して

$$\{A \in GL(n, R);\ \langle Ax, Ay\rangle=\langle x, y\rangle\}$$

をローレンツ群（Lorentz group）とよび $O(n-1,1)$ で表す．これは $GL(n, R)$ の閉リー部分群である．

行列Aの列ベクトルを $a_1, \cdots, a_n$ とするとき，$A \in O(n-1,1)$ であるための必要十分な条件は $\{a_1, \cdots, a_n\}$ が L^n のローレンツ基になっていることである．

また $a_n{}^n$ を列ベクトル a_n の n番目の成分としたとき

$$SO^+(n-1,1)=\{A \in O(n-1,1);\ 行列式=1,\ a_n{}^n>0\}$$

を**固有ローレンツ群**（proper Lorentz group）という．これはもちろん $O(n-1,1)$ の部分群であるが，$O(n-1,1)$ の単位元を含む連結成分であることが知られている．

§2. ローレンツ多様体

多様体 M の上の**ローレンツ計量**（Lorentzian metric）とは $(0,2)$ 型の微分可能テンソル場 g であって，M の各点 pにおいて

$$(X, Y) \in T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow g_p(X, Y)$$

が $T_p(M)$ のローレンツ内積を与えるもののことである．このとき (M, g) を**ローレンツ多様体**（Lorentzian manifold）という．

多様体 M が第2可算公理をみたすとき，M に（正値）リーマン計量が存在することは第1章 §5の通りであるが，ローレンツ計量が存在するとは限らない．このことに関しては次のことが知られている．

定理 1 M にローレンツ計量が存在すれば，M に1次元の接分布が存在し，また逆も成り立つ．

[証明] M にローレンツ計量 g が存在するとしよう．他に，任意の正値リーマン計量 g_0 を選ぶことによって，M 上の (1,1) 型のテンソル場 A で $g(X, Y)=g_0(AX, Y)$ がすべてのベクトル場 X, Y に対して成り立つものがとれる．A は各点 p で $T_p(M)$ の g_0 に関する対称な線形変換で，したがって固有ベクトルから成る（g_0 に関する）正規直交基が存在する．ここで g がローレンツ計量ということから負の固有値がちょうど一つあり，それに対応する1次元の固有空間が一意的に定まる．各点で一意的にきまる負の固有値 λ_p は微分可能関数で，その固有空間 Δ_p は微分可能接分布であることがわかる．

逆に，Δ が1次元接分布であるとしよう．また，リーマン計量 g_0 を選んでそれに関する Δ の直交補空間を $\Delta^\perp$ とかく．各点 p において $X\in\Delta_p$ に対して $g(X, X)=-g_0(X, X)$; $X\in\Delta_p$, $Y\in\Delta_p{}^\perp$ に対して $g(X, Y)=0$; $X, Y\in\Delta_p{}^\perp$ に対して $g(X, Y)=g_0(X, Y)$ と定義することによってローレンツ内積 g が定まる．各点 p の近傍で g_0 に関する正規直交ベクトル場 $X_1, \cdots, X_n$ で $X_n\in\Delta$ となるものがとれ，かつ $\{X_1, \cdots, X_n\}$ は各点で g に関するローレンツ基になっているから g の微分可能性が得られる．

問 上の証明中，関数 λ とその固有空間 Δ の微分可能性を確かめよ．

微分位相幾何学から次のことが知られている．連結多様体がコンパクトでなければ，どの点でも0にならないベクトル場が（したがって1次元接分布が）存在する．コンパクトで奇数次元ならば同じ事実が成り立つ．次元が偶数ならばそのオイラー数が0であるときかつそのときに限りどの点でも0にならないベクトル場が存在する．

このことから

定理 2 連結多様体 M は 1) コンパクトでないとき，または 2) コンパクトで奇数次元のとき，または 3) コンパクト偶数次元でオイラー数が0のとき，ローレンツ計量をもつ．

多様体 M がローレンツ計量 g をもつとしよう．M の接 n 枠束 $L(M)$ の中で

$$O_g(M)=\{u=(X_1,\cdots,X_n)\in L(M);\ (X_1,\cdots,X_n)\ \text{はローレンツ基}\}$$

を考えると，これはローレンツ群 $O(n-1,1)$ を構造群とする部分束になっている．

問 逆に，$L(M)$ の構造群 $GL(n,R)$ が $O(n-1,1)$ に縮小できるとき，M はローレンツ計量をもつことを示せ．

$O_g(M)$ を**ローレンツ枠束** (bundle of Lorentzian frames) とよぶ．

多様体 M がローレンツ計量 g をもつとき，そのレビ・チビタ接続，すなわち捩率テンソルが 0 でかつ計量的 ($\nabla g=0$) である線形接続が一意的に定まる．この証明は，リーマン計量のとき（第 4 章 §1 の定理）と同様である．実際，その証明は任意の符号数の非退化計量のときに通用する．

局所座標系に関する g の成分，クリストッフェル記号に対する公式（第 4 章 §1 の式 (9)）等もリーマン計量のときと同じである．

レビ・チビタ接続に関する平行移動はローレンツ計量を保つから，接ベクトルが空間的，時間的または零的という性質も保存する．特に測地線 x_t については，接ベクトル x_t' は 1 点で空間的，時間的または零的であるかに応じてどの点でも同じ性格をもつことになる．したがって，それぞれの場合に応じて測地線が空間的，時間的または零的であるという．

レビ・チビタ接続の曲率テンソル R は g に関して歪対称，すなわち

$$g(R(X,Y)Z,U)=-g(Z,R(X,Y)U)$$

をみたす．証明は第 4 章 §2 の (3) と同じである．

リッチ・テンソル Ric もリーマン計量のときと同様に定義する．すなわち，$X,Y\in T_p(M)$ のとき $T_p(M)$ の線形変換 $V\to R(V,X)Y$ のトレースを $\mathrm{Ric}\,(X,Y)$ とおく．この $(0,2)$ 型のテンソルを**リッチ・テンソル** (Ricci tensor) とよぶ．リーマン計量のときと同様に $\mathrm{Ric}(Y,X)=\mathrm{Ric}\,(X,Y)$ が成り立つ．

問 ローレンツ内積に関して歪対称な線形変換のトレースは 0 であることを証明せよ．

Ric に対応する (1,1) 型のテンソルを Ric* で表す．すなわち

$$g(\mathrm{Ric}^*(X), Y) = \mathrm{Ric}(X, Y)$$

Ric* のトレース ρ を**スカラー曲率** (scalar curvature) という．1点 p での $T_p(M)$ のローレンツ基 $\{X_1, \cdots, X_n\}$，ただし $g(X_1, X_1) = \cdots = g(X_{n-1}, X_{n-1}) = 1$, $g(X_n, X_n) = -1$ をとると

$$\rho = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ric}(X_i, X_i) - \mathrm{Ric}(X_n, X_n)$$

となる．

リーマン計量のときと同様に $\mathrm{Ric} = cg$ がある定数 c について成り立つとき，(M, g) を**アインシュタイン空間** (g を**アインシュタイン計量**) という．

第4章 §2 定理2と同様に，もし $\mathrm{Ric} = \rho g$ がある関数 ρ に関して成り立ち，M の次元が少なくとも3であるときは ρ は定数，したがって M はアインシュタイン空間になる．

問 アインシュタイン空間に対しては $\mathrm{Ric} = (\rho/n)g$ となることを示せ．ここで n は M の次元．

特に，M の次元が4のとき相対性理論では，

$$G = \mathrm{Ric} - \frac{1}{2}\rho g$$

を**アインシュタイン・テンソル** (Einstein tensor) とよぶ．

問 $G = 0$ ならば $\mathrm{Ric} = 0$ であることを示せ (逆は明らかである)．

断面曲率 (sectional curvature) の定義をするとき，ローレンツ計量の場合は，リーマン計量の場合と多少異なった注意が必要になってくる．リーマン計量の場合は各点 p の接空間 $T_p(M)$ の平面 σ をとるとき，その任意の基 $\{X, Y\}$ に対して σ の断面曲率 $K(\sigma)$ は

$$K(\sigma) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

で与えられる．右辺は X, Y のとり方に無関係，その分母はコーシー・シュワルツの不等式によりつねに正であることは前に注意したところである．いま，

ローレンツ計量 g に同様のことを試みると,

$$g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2$$

は X, Y で張られる平面 σ が**退化**の場合（すなわち g の σ への制限が退化の場合）に0になる．これをはっきりみるために

補題 1　ローレンツ内積をもつベクトル空間 V の1次独立な二つのベクトル X, Y によって張られる平面 σ が退化であるための必要かつ十分な条件は

$$\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle X,Y\rangle^2=0$$

である.

［**証明**］ σ が退化であるとは，$aX+bY\neq 0$ で

$$\langle aX+bY,X\rangle=a\langle X,X\rangle+b\langle X,Y\rangle=0$$
$$\langle aX+bY,Y\rangle=a\langle X,Y\rangle+b\langle Y,Y\rangle=0$$

の両方を満足する a,b が存在すること，すなわち上の二つの連立方程式が解 $(a,b)\neq(0,0)$ をもつことであるから，その必要かつ十分な条件は係数の行列式

$$\begin{vmatrix}\langle X,X\rangle & \langle X,Y\rangle\\ \langle X,Y\rangle & \langle Y,Y\rangle\end{vmatrix}=\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle X,Y\rangle^2$$

が0であることである.

問　補題のように X, Y の張る平面を σ とするとき，内積の σ への制限が正値であるための必要かつ十分な条件は

$$\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle X,Y\rangle^2>0$$

であること，ローレンツ内積であるための必要かつ十分な条件は

$$\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle X,Y\rangle^2<0$$

であることを証明せよ.

ローレンツ多様体 M の各点 p において，非退化平面 σ に対してその基 $\{X, Y\}$ をとり

$$K(\sigma)=\frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2}$$

を σ に対する**断面曲率**と定義する．右辺が X, Y のとり方に無関係なことは第4章§4のときと同様である．$T_p(M)$ のすべての非退化平面 σ に対して $K(\sigma)$ の値が一定であるとき，p において**定曲率**（constant sectional curva-

ture）であるという．M の次元が少なくとも 3 のとき（そして M が連結であるとして），各点 p において定曲率ならば，その値は M 全体の上で定数であるというシューアの定理はリーマン計量のときと同様に成り立つ．点 p をきめたときの次の補題から，第 4 章§4 定理 2 の証明に帰着させることができる．

補題 2 p において断面曲率がすべての非退化平面 σ に対して定数 c に等しいとき $R=cR_0$ となる． ここで R_0 は $R_0(X,Y)Z=g(Y,Z)X-g(X,Z)Y$ で定義される (1,3) 型のテンソルである．

［証明］ X, Y で張られる平面 σ が非退化であるとき，$K(\sigma)=c$ から

$$g((R-cR_0)(X,Y)Y,X)=0$$

となる．いま，X, Y で張られる平面が退化であるときは，ベクトルの列 X_n, Y_n で X_n, Y_n で張られる平面は非退化で，かつ X_n, Y_n がそれぞれ X, Y に収束するようなものをとることができる（このことは上の補題 1 から明らかであろう）．

$g((R-cR_0)(X_n,Y_n)Y_n,X_n)=0$ から $g((R-cR_0)(X,Y)Y,X)=0$ が成り立つ．このあとは第 4 章§4 定理 1 の証明の通りである．

ローレンツ計量の断面曲率について次のような結果が知られているが，ここでは証明を略する．

点 p の，平面 σ への g の制限が正値または負値であるとき，σ は**空間的** (spacelike) または**時間的** (timelike) という．

定理 3 点 p においてある定数 c があって，

1） すべての空間的平面 σ に対して $K(\sigma)=c$

または

2） すべての時間的平面 σ に対して $K(\sigma)=c$

ならば，すべての非退化平面 σ に対して $K(\sigma)=c$ である．

最初に注意したように平面 σ が退化のときは $g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2=0$ だから $K(\sigma)$ を定義することはできない． しかし次の定理が成り立つのはいささか興味深い．

定理 4 X, Y が張る平面が退化であるようなベクトル X, Y に対してつねに $g(R(X,Y)Y,X)=0$ であるならば，すべての非退化平面 σ に対して $K(\sigma)$ は定数である．

さらに，リーマン計量のときと違って，断面曲率の有界性について次の結果が知られている．

定理 5 点pにおけるすべての非退化平面σに対して $|K(\sigma)| \leqq c$ となるようなcが存在すれば，$K(\sigma)$ は定数である．

リッチ・テンソルについても，ローレンツ計量特有の結果がある．

定理 6 (M, g) がローレンツ多様体，M の次元が少なくとも 3 とする．もしある $c>0$ があって

1) $|\mathrm{Ric}\,(X, X)| \leqq c$ がすべての時間的単位ベクトル X に対して成り立つ

または

2) $|\mathrm{Ric}\,(X, X)| \leqq c$ がすべての空間的単位ベクトル X に対して成り立つ

または

3) $\mathrm{Ric}\,(X, X)=0$ がすべての零的ベクトル X に対して成り立つ

ならば，M はアインシュタイン空間である．

これらの結果については，次の論文をみよ．

R. S. Kulkarni : The values of sectional curvature in indefinite metrics, Comment. Math. Helv. 54 (1979), 173–176.

L. Graves and K. Nomizu : On sectional curvature of indefinite metrics, Math. Ann. 232 (1978), 267–272.

M. Dajczer and K. Nomizu : On sectional curvature of indefinite metrics II, Math. Ann. 247 (1980), 279–282.

M. Dajczer and K. Nomizu : On the boundedness of Ricci curvature of an indefinite metric, Bol. Soc. Brasil. Mat. 11 (1980), 25–30.

最後に，第4章§9 で扱った共形ワイル・テンソルに関する事柄は，ローレンツ計量に対しても成り立つことをもう一度注意しておこう．

§3. 時間的曲線とフェルミ・ウォーカー微分

(M, g) をローレンツ多様体とする M の**時間的曲線** (timelike curve) とは，曲線 $a<t<b \to x_t$ であってその接ベクトル x_t' がすべて時間的，す

なわち $g(x_t', x_t') < 0$ であるものをいう (5-5 図). いま区間 (a, b) が 0 を含むとして

$$s(t) = \int_0^t \|x_t\| dt$$

で導入される助変数 s を時間的曲線の **固有時間** (proper time) とよぶ. ここで

$$\|x_t'\| = \sqrt{-g(x_t', x_t')}$$

であることを思い出しておこう. これは普通ユークリッド空間ないしリーマン空間の曲線の弧長に相当する助変数である. 固有時間 s に関して接ベクトル x_s' をとると $g(x_s', x_s') = -1$ となる. 以下このような固有時間 s を助変数とする時間的曲線を考えることにしよう (このような曲線の物理的意味はあとでのべることにする).



5-5 図

時間的曲線 x_s に沿う **フェルミ・ウォーカー微分演算** (Fermi-Walker differentiation) を定義しよう. これは (M が 4 次元のとき) 相対性理論で大切なものである. 曲線 x_s に沿うベクトル場 X の全体をいま $\mathfrak{X}$ で表そう. 第3章 §7 でのべたように, M のレビ・チビタ接続による共変微分演算に基づいて, 曲線 x_s に沿う共変微分演算

$$X \in \mathfrak{X} \to \nabla_s X \in \mathfrak{X}$$

が定義される. さて

$$(1) \qquad \nabla_s{}^F X = \nabla_s X - g(X, \nabla_s x_s') x_s' + g(X, x_s') \nabla_s x_s'$$

とおいて $X \in \mathfrak{X} \to \nabla_s{}^F X$ という写像が得られるが

$$(2) \qquad \begin{cases} \nabla_s{}^F (X + Y) = \nabla_s{}^F (X) + \nabla_s{}^F (Y) \\ \nabla_s{}^F (fX) = \left(\dfrac{df}{ds}\right) X + f \nabla_s{}^F X \end{cases}$$

が任意の $X, Y \in \mathfrak{X}$ と任意の微分可能関数 $f = f(s)$ に対して成り立つことは容易にわかる. $\nabla_s{}^F X$ を X の **フェルミ・ウォーカー微分** とよぶ.

特に, $X = x_s'$ をとると (1) において

$$g(x_s', x_s') = -1, \qquad g(x_s', \nabla_s x_s') = 0$$

であるから

(3)
$$\nabla_s^F x_s' = 0$$

を得る．また $X \in \mathfrak{X}$ が各点で x_s' に直交しているとき，すなわち $g(x_s', X) = 0$ のとき，(1) において

$$g(X, \nabla_s x_s') = -g(\nabla_s X, x_s')$$

であるから

(4)
$$\nabla_s^F X = \nabla_s X + g(\nabla_s X, x_s')x_s'$$

すなわち $\nabla_s^F X$ は $\nabla_s X$ の曲線に直交する成分に他ならないことがわかる．

さらに，∇_s^F が次の性質をもっていることも容易に確かめられる．

$X, Y \in \mathfrak{X}$ に対して

(5)
$$\frac{d}{ds} g(X, Y) = g(\nabla_s^F X, Y) + g(X, \nabla_s^F Y)$$

したがって X, Y がフェルミ・ウォーカーの意味で平行（すなわち $\nabla_s^F X = 0$, $\nabla_s^F Y = 0$）ならば $g(X, Y)$ は定数であることがわかる．

また曲線 x_s が測地線であるときは任意の $X \in \mathfrak{X}$ に対して $\nabla_s^F X = \nabla_s X$ である．これは直接 (1) から $\nabla_s x_s' = 0$ によって明らかである．

ここで，時間的曲線の物理的意味をのべておこう．いま，ユークリッド3次元空間 E^3 の中での質点の運動があるとして直交座標系 $\{x_1, x_2, x_3\}$ をとり，時刻 t のとき質点の位置が

$$x_i = x_i(t), \qquad 1 \leqq i \leqq 3$$

で表されているとしよう．このとき，質点の速度ベクトル (velocity vector) $V = V(t)$ は

$$V(t) = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right)$$

である．速度 (speed) $v = v(t)$ は

$$v = \|V\| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2}$$

で与えられる．

さて，質点の速度は光速度より小さいと仮定し，また距離の単位が光速度＝1 となるように選んであるとしよう．このとき $v < 1$ であるから

$$u(t)=\int_0^t \sqrt{1-v(s)^2}\,ds \tag{6}$$

とおくと $du/dt=\sqrt{1-v(t)^2}>0$ となる．したがって逆関数 $t=t(u)$ が存在する．

ここでミンコウスキー空間 L^4 でその内積を

$$\langle(x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)\rangle=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4$$

とする．L^4 の曲線

$$u\ \rightarrow\ y(u)=(x_1(t(u)),x_2(t(u)),x_3(t(u)),t(u))$$

を考えると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{du}&=\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{dt}{du},\frac{dx_2}{dt}\frac{dt}{du},\frac{dx_3}{dt}\frac{dt}{du},\frac{dt}{du}\right)\\&=\left(\frac{dt}{du}\right)\left(\frac{dx_1}{dt},\frac{dx_2}{dt},\frac{dx_3}{dt},1\right)\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{dy}{du},\frac{dy}{du}\right\rangle&=\left(\frac{dt}{du}\right)^2\left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2-1\right)\\&=\frac{v(t)^2-1}{1-v(t)^2}=-1\end{aligned}$$

を得る．したがって，$y(u)$ は u を固有時間助変数とする時間的曲線である．かつ $y'(u)=dy/du$ はいつも未来的であるから曲線 $y(u)$ が未来的であるという．

逆に，$y(u)$ が L^4 の未来時間的曲線で u が固有時間助変数であるとしよう．これを

$$y(u)=(x_1(u),x_2(u),x_3(u),x_4(u))$$

と表すと

$$\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{du}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{du}\right)^2-\left(\frac{dx_4}{du}\right)^2=-1$$

曲線が未来的ということから $dx_4/du>0$. 便宜上，x_4 の代わりに t とかいて $t=t(u)$ の逆関数を $u=u(t)$ としよう．上の式から x_1,x_2,x_3 を t の関数と考えて

$$\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2-1\right]\left(\frac{dt}{du}\right)^2=-1$$

したがって

$$(7) \qquad \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2=1-\left(\frac{du}{dt}\right)^2<1$$

となる．E^3 の中で

$$t \to (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

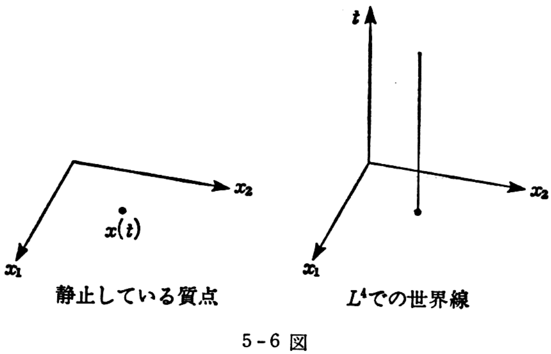
を質点の運動と考えると，その速度 $v(t)$ は 1 以下になっている．(7) から

$$\frac{du}{dt}=\sqrt{1-v(t)^2}$$

したがって (6) が成り立ち，この運動に対応する L^4 の曲線が与えられた曲線と一致することがわかる．

E^3 の質点の運動 $x(t)$ に対応する L^4 の曲線 $y(u)$ を質点の **世界線** (world line) とよぶ．

問 静止している質点の世界線は L^4 の直線であることを示せ (5-6 図，ただし x_3 軸は省略してある)．

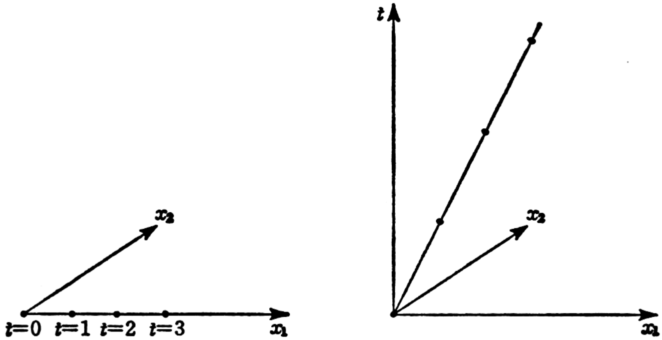


5-6 図

問 直線上を等速運動している質点の世界線は L^4 の直線であるが，等速でないときの世界線は L^4 の直線ではないことを示せ (5-7, 8 図，x_3 軸は省略)．

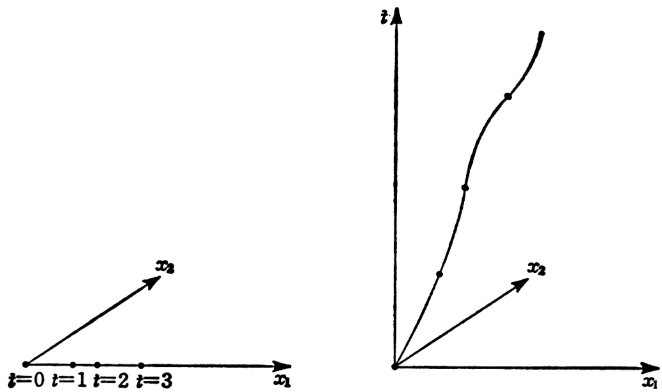
以上で，ミンコウスキー空間 L^4 での未来時間的曲線の物理的意味が説明できたわけであるが，一般のローレンツ多様体 (M, g) で「未来時間的」という概念を定義できるためには **時間的向き** (time orientation) が必要である．M は連結であると仮定しておこう．

まず，M の各点 x における時間的ベクトルの全体を $\mathfrak{T}_x$ で表すと，これは $T_x(M)$ の開集合であって二つの連結成分をもっている．任意の $V\in\mathfrak{T}_x$ をとって



直線上の等速運動　　L^4での世界線

5-7 図



直線上の不等速運動　　L^4での世界線

5-8 図

$$\{X\in\mathfrak{T}_x;\ \langle X, V\rangle<0\}$$
$$\{X\in\mathfrak{T}_x;\ \langle X, V\rangle>0\}$$

を考えると，これらが $\mathfrak{T}_x$ の二つの連結成分になっていることがわかる．また §1 定理 3 の 1) を用いて次のことがわかる．いま $\mathfrak{T}_x$ の中で $\langle x, y\rangle<0$ であるとき $x\sim y$ とかくことにするとこれが同値関係であり，$\mathfrak{T}_x$ は二つの同値

類に分かれそれぞれが上に考えた連結成分と一致している．

時間的向きづけが可能 (time orientable) とは，M の各点 x に対し $\mathfrak{T}_x$ のどちらかの連結成分を選び，この選び方が連続的であるようにできることである．いま x に対して選ばれた $\mathfrak{T}_x$ の連結成分を $\mathfrak{T}_x^+$ とかくとすると，時間的ベクトル場 X があり $X_x \in \mathfrak{T}_x^+$ が1点 x で成り立てば，x の近傍の各点 y で $X_y \in \mathfrak{T}_y^+$ が成り立つという条件で，$x \to \mathfrak{T}_x^+$ の連続性がきっちりと定義できる．

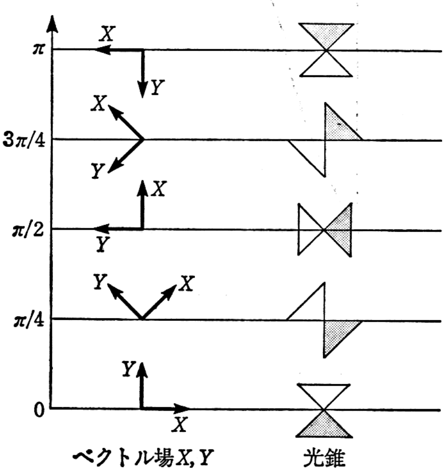
時間的向きづけが可能であるとき，それは2通りの仕方で可能であることがわかる．$x \to \mathfrak{T}_x^+$ が一つの時間的向き (time orientation) ならば $\mathfrak{T}_x^-$ をもう一つの連結成分としたとき，$x \to \mathfrak{T}_x^-$ が別の時間的向きを与えることになる．

問　このことを厳密に証明せよ．

ローレンツ空間 L^n は明らかに時間的向きづけ可能である．時間的向きづけが可能でない2次元ローレンツ多様体の例を次のようにして作ることができる．

R^2 でベクトル場

$$X = (\cos y, \sin y), \qquad Y = (-\sin y, \cos y)$$



5-9 図

をとり $\langle X, X\rangle = 1$，$\langle Y, Y\rangle = -1$ となる R^2 のローレンツ計量を考える．この計量は $(x, y) \to (x, y+\pi)$ という変換によって不変であるから (ベクトル場 X は $-X$ に，Y は $-Y$ に変わる．正確にいえば $X_{(x,y+\pi)}$ は $-X_{(x,y)}$ に平行，$Y_{(x,y+\pi)}$ は $-Y_{(x,y)}$ に平行である)．

いま R^2 で (x, y) と $(x, y+\pi)$ を同一視して得られる2次元多様体 M (位相的には $R^1 \times S^1$) 上にローレンツ計量 g が得られる．(M, g) は時間的向きづけ可能ではない

(5-9 図).

時間的向きに関して次のことがいえる.

定理 1 (M, g) が時間的向きづけ可能でないときは，M の2重被覆空間 $\tilde{M}$ とそのローレンツ計量 $\tilde{g}$ で $(\tilde{M}, \tilde{g})$ は時間的向きづけ可能で，また被覆写像 $\pi: \tilde{M} \to M$ が等長であるものが存在する.

証明は詳しくのべないが，次のようにして $\tilde{M}$ を作る.

M の各点 x と $\mathfrak{T}_x$ の連結成分の一つ（仮にそれを $\mathfrak{T}_x'$ で表す）の組 $(x, \mathfrak{T}_x')$ の全体を $\tilde{M}$ とする．$\tilde{M}$ を多様体と考えるため点 $\tilde{x} = (x, \mathfrak{T}_x')$ の近傍 $\tilde{U}$ を次のようにとる．x の座標近傍を U とし，一つのベクトル $X \in \mathfrak{T}_x'$ を拡張した U 上の時間的ベクトル場を X としたとき，$y \in U$ と X_y を含む $\mathfrak{T}_y$ の成分を $\mathfrak{T}_y'$ として $\tilde{y} = (y, \mathfrak{T}_y')$ の全体を $\tilde{U}$ としてこれを点 $\tilde{x}$ の近傍と考える．$(y, \mathfrak{T}_y') \in \tilde{U} \to y \in U$ は1対1になるから U の座標系を $\tilde{U}$ の座標系と考えることができる．このようにして $\tilde{M}$ を可微分多様体とすることができること，

$$(x, \mathfrak{T}_x') \in \tilde{M} \;\to\; \pi(x, \mathfrak{T}_x') = x \in M$$

が被覆写像になっていることを確かめたのち π が等長になるように $\tilde{M}$ 上のローレンツ計量 $\tilde{g}$ を定義する.

$(\tilde{M}, \tilde{g})$ が時間的向きづけ可能であることは次のように考える．すなわち点 $\tilde{x} = (x, \mathfrak{T}_x')$ の接空間 $T_{\tilde{x}}(\tilde{M})$ とその時間的ベクトルの全体 $\tilde{\mathfrak{T}}_{\tilde{x}}$ は π_* によってそれぞれ $T_x(M)$ と $\mathfrak{T}_x$ と同一視できるから，$\mathfrak{T}_x'$ に対応する $\tilde{\mathfrak{T}}_{\tilde{x}}$ の連結成分 $\tilde{\mathfrak{T}}_x^+$ を $\tilde{x}$ で選ぶことにする．このように $\tilde{x} \in \tilde{M} \to \tilde{\mathfrak{T}}_x^+$ をきめるとこれが時間的向きづけになっていることがわかる.

系 M が単連結ならば，任意のローレンツ計量 g に対して (M, g) は時間的向きづけ可能である.

定理 2 ローレンツ多様体 (M, g) が時間的向きづけ可能であることと，M 全体で定義された時間的ベクトル場が存在することとは同値である.

［証明］ M 全体で定義された時間的ベクトル場 X があるとき，各点 x に対して X_x を含む $\mathfrak{T}_x$ の連結成分 $\mathfrak{T}_x^+$ を選ぶと時間的向きが定まる.

逆に，$x \to \mathfrak{T}_x^+$ が時間的向きであるとする．M 上の正値リーマン計量 g_0 を一つとり，§2 定理1の証明のようにして時間的1次元空間が選べるが，$\mathfrak{T}_x^+$ に属する時間的単位ベクトル X_x が一意的に存在する．このとき時間的単位ベクトル場 $x \to X_x$ が微分可能であることが確かめられる．

注意　時間的向き $x \to \mathfrak{T}_x^+$ が与えられているとき

$$\mathfrak{T}^+ = \bigcup_{x \in M} \mathfrak{T}_x^+$$

が M 上の $\mathfrak{T}_x^+$ をファイバーとする束になっていること，ファイバーがユークリッド空間に同相であることから切り口 $M \to \mathfrak{T}^+$ が存在するという議論（第1章§8定理1）を用いてもよい．

問　ローレンツ多様体 M が向きづけ可能また時間的向きづけ可能ならば，M のローレンツ枠束の構造群 $O(n-1,1)$ は固有ローレンツ群 $SO^+(n-1,1)$ まで縮小できることを示せ．

§4. ドゥ・ジッター空間，反ドゥ・ジッター空間

相対性理論で用いられるドゥ・ジッター時空（de Sitter spacetime），反ドゥ・ジッター時空（anti-de Sitter spacetime）はそれぞれ正の定曲率，負の定曲率をもつ4次元のローレンツ多様体である．ここでは一般 n 次元のとき，正，負の定曲率をもつローレンツ多様体 S_1^n, H_1^n を定義してその測地線を調べよう．これらはリーマン幾何の球面 S^n, 双曲空間 H^n のローレンツ版であるといえる．

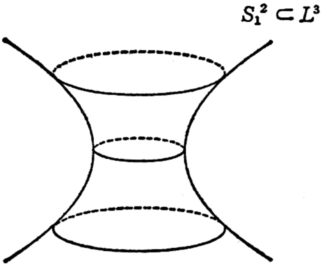
まず，L^{n+1} のローレンツ座標系 $\{x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ に関する2次超曲面

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = r^2$$

を考える．ここで r は任意にきめた正数である．ローレンツ内積 $\langle x, y\rangle$ を用いて上の式はもちろん

（1）　　$\langle x, x\rangle = r^2$

とかくことができる．この超曲面を $S_1^n(r)$ とかき，半径 r の**ドゥ・ジッター空間**（de Sitter space）とよぶ．特に，$r=1$ のとき単にドゥ・ジッター空間とよぶ．



5-10 図

$S_1^n(r)$ が定曲率 $1/r^2$ をもつローレンツ多様体であることを示そう（5-10図）.

ユークリッド空間 E^{n+1} 内の球面 $S^n(r)$ のときと同じように，ローレンツ空間 L^{n+1} 内の超曲面 $M=S_1^n(r)$ の幾何を考える.

まず M の点 x で L^{n+1} への接空間 $T_x(L^{n+1})$ は自然に L^{n+1} と同一視できる. M の接空間 $T_x(M)$ は L^{n+1} の線形部分空間と考えてよい. 任意の $X\in T_x(M)$ は x を始点とする M の曲線 x_t の接ベクトル x_0' と考えてよいから $\langle x_t, x_t\rangle=r^2$ を微分して $\langle X, x\rangle=0$ を得る. 次元を考えることによって

（2） $$T_x(M)=\{X\in L^{n+1};\ \langle X, x\rangle=0\}$$

であることがわかる. 位置ベクトル x の張る1次線形部分空間を (x) とかけば,

（3） $$L^{n+1}=T_x(M)\oplus(x)\qquad（直交直和）$$

となることがわかる. $\langle x, x\rangle=r^2$ であるからローレンツ内積の $T_x(M)$ への制限の符号数は $(n-1, 1)$, したがってまたローレンツ内積である. これを g_x として， M の上の L^{n+1} から誘導されたローレンツ計量 g が得られることになる.

点 x で

（4） $$\xi_x=-\frac{x}{r}$$

とおくと，(3) から ξ_x は $T_x(M)$ に直交する空間的単位ベクトルであることがわかる. したがって ξ は（空間的）単位法ベクトル場である.

ここでもう少し一般にして，(M, g) が n 次元ローレンツ多様体で L^{n+1} に等長的に入っているとしよう. M の各点の近傍 U で時間的単位法ベクトル場 ξ をとり

（3′） $$L^{n+1}=T_x(M)\oplus(\xi_x),\qquad x\in U$$

と考える. X, Y が U 上の M の接ベクトル場であるとき，L^{n+1} での共変微分 D_XY を (3′) にしたがって M に接する成分と直交する成分とに分解して

（5） $$D_XY=\nabla_XY+h(X, Y)\xi$$

とかくことにしよう．ユークリッド空間 E^{n+1} の超曲面 M のときと全く同様にして，$\nabla_X Y$ が M のローレンツ計量のレビ・チビタ接続であることがわかる．また h は $T_x(M)$ 上の双線形関数である．次に，法ベクトル場 ξ の共変微分 $D_X\xi$ は ξ に直交，したがって $T_x(M)$ の元であるから

$$D_X\xi = -AX \tag{6}$$

とかいて，$T_x(M)$ の線形変換 A を定義しこれを第 2 基本テンソル（second fundamental tensor）または形作用素（shape operator）とよぶ．

$\langle\xi,\xi\rangle = 1$ から $h(X, Y) = g(AX, Y)$ となることもユークリッド空間の超曲面の場合と同様である．またガウスの方程式

$$R(X, Y) = AX \wedge AY \tag{7}$$

も成り立つ．ここで右辺の $\wedge$ はローレンツ計量 g に関して

$$(X \wedge Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

と定義される．

問　以上のべたことを確かめよ．

さて $M = S_1^n(r)$ の場合にもどろう．このときは $\xi = -x/r$ であるから (6) から $A = I/r$（I は恒等変換）を得る．ガウスの方程式 (7) から

$$R(X, Y) = \frac{1}{r^2} X \wedge Y$$

これは M が定曲率 $1/r^2$ をもつことを表している．以下，簡単のために $r = 1$ とおいて $M = S_1^n$ の測地線を調べよう．

M の曲線 x_t に対して

$$D_t x_t' = \frac{d^2x}{dt^2} = \nabla_t x_t' - \langle x_t', x_t'\rangle x_t$$

であるから，x_t が測地線であるための方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\langle x_t', x_t'\rangle x_t$$

となる．

1)　x_t が空間的測地線であるとき　　t を弧長助変数とすると，上の方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x_t$$

であるから，始点 x と x における接ベクトル X をもつ測地線は

$$x_t = \cos t\, x + \sin t\, X$$

で与えられる．$\langle X, x\rangle = 0$ であることに注意しておこう．

2) x_t が時間的測地線であるとき　t を固有時間助変数とすると，上の方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x_t$$

となるから，(x, X) を初期条件とする測地線は

$$x_t = \cosh t\, x + \sinh t\, X$$

で与えられる．

3) x_t が零的測地線であるとき　このときの方程式は（t が任意のアファイン助変数で）

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

であるから，(x, X) を初期条件とする測地線は

$$x_t = x + tX$$

で与えられる．これは L^{n+1} の中の零的直線で始点 x と共に $S_1{}^n$ に含まれている．

以上で $S_1{}^n$ の測地線をすべて求めることができたが，どの測地線も完備であることに注意しておこう．

問　$S_1{}^n(r)$ の測地線をすべて求めよ．

次に反ドゥ・ジッター空間を説明しよう．そのために§1でのべた符号数 $(n-1, 2)$ の内積

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$$

をもつ R^{n+1} のことを $R_2{}^{n+1}$ と表すことにして，その2次超曲面

$$x_1{}^2 + \cdots + x_{n-1}{}^2 - x_n{}^2 - x_{n+1}{}^2 = -r^2$$

を $H_1{}^n(r)$ と表す．ここで $r > 0$ である．これからのべることは，第4章§5

で L^{n+1} の中の超曲面として双曲型空間 H^n の幾何を論じたのと同様であるから詳しいことは省略する．簡単のため，$M=H_1^n(r)$ とすると M の点 x での接空間 $T_x(M)$ は

$$T_x(M)=\{X\in R_2^{n+1};\ \langle X,x\rangle=0\}$$

となる．また

$$R_2^{n+1}=T_x(M)\oplus(x)\qquad(\text{直交直和})$$

であるから R_2^{n+1} の内積の $T_x(M)$ への制限の符号数は $(n-1,1)$ となり，したがって M に誘導されたローレンツ計量 g が定義できる．各点 x で $\xi_x=-x/r$ として時間的単位法ベクトル場 ξ をとり，それから第2基本テンソル A を求めると $A=I/r$（I は前と同じく恒等変換）となる．第2基本形式 h は

$$h(X,Y)=g(-AX,Y)=-\frac{1}{r}g(X,Y)$$

となる．ガウスの方程式は

$$R(X,Y)=-AX\wedge AY=-\frac{1}{r^2}X\wedge Y$$

となるから，M は定曲率 $-1/r^2$ をもつことがわかる．

$H_1^n(r)$ を半径 r の**反ドゥ・ジッター空間** (anti-de Sitter space)．特に $r=1$ のとき H_1^r とかき，反ドゥ・ジッター空間とよぶ．

H_1^n の測地線は S_1^n のときと同様にして求めることができるから，読者に任せて結果だけのべておこう．三角関数と双曲関数の現れ方が S_1^n の場合と反対になっていることに注意されたい．

1) $x\in H_1^n$, $X\in T_x(H_1^n)$, $\langle X,X\rangle=1$ とするとき (x,X) を初期条件とする空間的測地線は

$$x_t=\cosh t\,x+\sinh t\,X$$

2) $x\in H_1^n$, $X\in T_x(H_1^n)$, $\langle X,X\rangle=-1$ とするとき (x,X) を初期条件とする時間的測地線は

$$x_t=\cos t\,x+\sin t\,X$$

3) $x\in H_1^n$, $X\in T_x(H_1^n)$, $\langle X,X\rangle=0$ とするとき (x,X) を初期条件とする零的測地線は

$$x_t = x + tX$$

S_1^n のときと同様に，H_1^n のどの測地線も完備であることがわかる．

以下，ローレンツ多様体の完備性について二，三の注意をつけ加えよう．

リーマン多様体が連結，完備であれば，任意の2点が測地線で結ばれることはよく知られているが，この事実はローレンツ多様体に対しては成立しない．たとえば S_1^2 をとり $x=(1,0,0)$，$y=(-1,c,c)$（ここで c は任意の0でない数）とすると，x から y への測地線は存在しない．

問 x を通るすべての測地線を具体的にかき表し，そのいずれも上のような点 y を通らないことを示せ．

またリーマン多様体が完備で，その断面曲率がある $c>0$ よりも小さくなければ多様体はコンパクトである（第4章§8）．この事実もローレンツ多様体に対して成立しないことは，たとえば S_1^n が位相的には $S^{n-1}\times R$ であることからわかる．

ローレンツ多様体で空間的，零的な測地線はすべて完備であるが，完備でない時間的測地線をもつ例が知られている．また測地線の意味では完備であるが，全完備でないローレンツ多様体（2次元）も知られている．ローレンツ多様体の全完備性はローレンツ枠束を用いても定義でき，相対性理論での特異点（ブラックホール）や境界の問題と関連している．これらについては文献の Hawking-Ellis の本，そこに引用されている論文

R. Geroch : What is a singularity in General Relativity, Ann. Phys. 48 (1968), 526–540.

B. Schmidt : A new definition of singular points in General Relativity, General Relativity and Gravitation 1 (1971), 269–280.

さらに

J. Beem : Some examples of incomplete space-times, General Relativity and Gravitation 7 (1976), 501–509

等をみられたい．

§5. $SL(2, R)$ の幾何

特殊線形群 (special linear group) $SL(2, R)$ とは実2次行列で行列式が1であるようなもの全体の作る群である．もちろん一般線形群 (general linear group) $GL(2, R)$ の閉部分リー群になっている．ここでは $SL(2, R)$ の上には左および右移動によって不変な，すなわち **両側不変** (biinvariant) なローレンツ計量が存在し，実際前節の H_1^3 と等長なローレンツ多様体になることを示そう．単位元 e を通る測地線は1助変数部分群になる．ここでのべることは第4章 §10 での $SO(3)$ の幾何の類似であると考えてよい．

まず，実2次行列全体の作る4次元ベクトル空間 $\mathfrak{gl}(2, R)$ において次のような内積を考える．すなわち

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\quad A'=\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \text{ に対して}$$

(1)
$$\begin{aligned}\langle A, A'\rangle &= \frac{1}{2}(bc'+b'c-ad'-a'd)\\ &= \frac{1}{2}\{\mathrm{tr}(AA')-(\mathrm{tr}\,A)(\mathrm{tr}\,A')\}\end{aligned}$$

特に，$A=A'$ とおいて得られる2次形式は

(2)
$$\langle A, A\rangle = -\det A$$

になっていることに注意しよう．いま線形同形

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{2}(a-d, b+c, a+d, c-b) \in R^4$$

その逆は

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow \begin{bmatrix} x_1+x_3 & x_2-x_4 \\ x_2+x_4 & x_3-x_1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{gl}(2, R)$$

であるが，この対応によって

$$\langle A, A\rangle = x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2$$

したがって，内積 (1) は R^4 の符号数 (2,2) の内積

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4$$

に対応していることがわかる．§4 でのように，この内積をもつ R^4 を R_2^4 と

かく.

この対応によって

$$SL(2,R)=\{A\in \mathfrak{gl}(2,R);\ \det A=-1\}$$

と

$$H_1^3=\{x\in R_2^4;\ \langle x,x\rangle=-1\}$$

とが対応することになる．したがって $\mathfrak{gl}(2,R)$ の内積から誘導されたローレンツ計量に関して $SL(2,R)$ は H_1^3 と等長になる.

群論的にいって $SL(2,R)$ のこのローレンツ内積は $A\in SL(2,R)$ による左移動 $X\to AX$ および 右移動 $X\to XA$ のいずれによっても不変であることは次の式からわかる.

$$\langle AX,AX\rangle=-\det(AX)=-\det A\cdot\det X=-\det X=\langle X,X\rangle$$

同様に

$$\langle XA,XA\rangle=\langle X,X\rangle$$

よく知られているように $SL(2,R)$ のリー環はトレースが0である実2次行列全体 $\mathfrak{sl}(2,R)$ である．これを単位行列 $e=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ における $SL(2,R)$ の接空間と考えると，そこでのローレンツ内積は

$$\langle X,Y\rangle=\frac{1}{2}\operatorname{tr}(XY) \tag{3}$$

で与えられる．$\mathfrak{sl}(2,R)$ のローレンツ基として，たとえば

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\qquad E_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\qquad E_3=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

がとれる．次の補題を証明しておく.

補 題　任意の $X\in\mathfrak{sl}(2,R)$ に対して $X^2=\langle X,X\rangle e$.

[**証 明**]　X のトレースは0だから

$$X=\begin{bmatrix}a&c\\b&-a\end{bmatrix}$$

とおくと

$$X^2=\begin{bmatrix}a&c\\b&-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&c\\b&-a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+bc&0\\0&a^2+bc\end{bmatrix}=(a^2+bc)e$$

ここで $\langle X, X\rangle = -\det X = a^2 + bc$ だから $X^2 = \langle X, X\rangle e$.

いま $X \in \mathfrak{sl}(2, R)$ を初期条件とする e からの測地線を求める．簡単のため $\langle X, X\rangle = 1$ または -1 または 0 であるとしよう．前節でみたように

$\langle X, X\rangle = 1$ のときは $x_t = (\cosh t)e + (\sinh t)X$

$\langle X, X\rangle = -1$ のときは $x_t = (\cos t)e + (\sin t)X$

$\langle X, X\rangle = 0$ のときは $x_t = e + tX$

が測地線であるが，これらは X で生成される 1 助変数部分群 $\exp tX$ と一致することを示そう．

いま $a_t = \exp tX$ とかくと，

$$\frac{da}{dt} = (\exp tX)X = a_t X$$

$$\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{da}{dt} X = a_t X^2$$

となる．$\langle X, X\rangle = 1,\ -1,\ 0$ に応じて

$$\frac{d^2a}{dt^2} = a_t, \qquad \frac{d^2a}{dt^2} = -a_t, \qquad \frac{d^2a}{dt^2} = 0$$

となるが，この解は上にみた測地線と一致している．

例として

$$\exp tE_1 = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}, \qquad \exp tE_2 = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$$

は空間的測地線（1 助変数部分群）であり

$$\exp tE_3 = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

は時間的測地線（1 助変数部分群）．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} = \exp t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{bmatrix} = \exp t \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

は零的測地線（1 助変数部分群）である．

問 $A \in SL(2, R)$ で $\operatorname{tr} A < -2$ ならば A はいかなる 1 助変数部分群の上にもないことを示せ．

問 $\{s,t\}$ を L^2 のローレンツ座標系とするとき

$$(s,t) \to f(s,t)=\begin{bmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \in SL(2,R)$$

は L^2 から $SL(2,R)$ の中への等長写像であることを示せ.

文　　献

1.　序でのべたように，第1章は多様体に関する予備知識を仮定しているが，それについては次のどの書物でも十分であろう．

松島与三：　多様体入門（数学選書 5，裳華房）

村上信吾：　多様体（共立数学講座19，共立出版）

服部晶夫：　多様体（岩波全書，岩波書店）

曲線，曲面論については，たとえば

小林昭七：　曲線と曲面の微分幾何（本選書17，裳華房）

線形代数については，たとえば

野水克己（矢野健太郎訳）：線形代数の基礎上，下（本選書12，裳華房）

リー群論については

C. Chevalley :　Theory of Lie Groups I (Princeton)

岩堀長慶：　リー群論（岩波講座現代応用数学，岩波書店）

ファイバー束については

N. E. Steenrod :　The Topology of Fibre Bundles (Princeton)

2.　微分幾何をさらにすすんで勉強するためには

S. Kobayashi, K. Nomizu : Foundations of Differential Geometry I, II (John Wiley)

特に，対称空間の理論については

S. Helgason :　Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces (Academic Press)

また，古典的テンソル解析に基づいた本としては

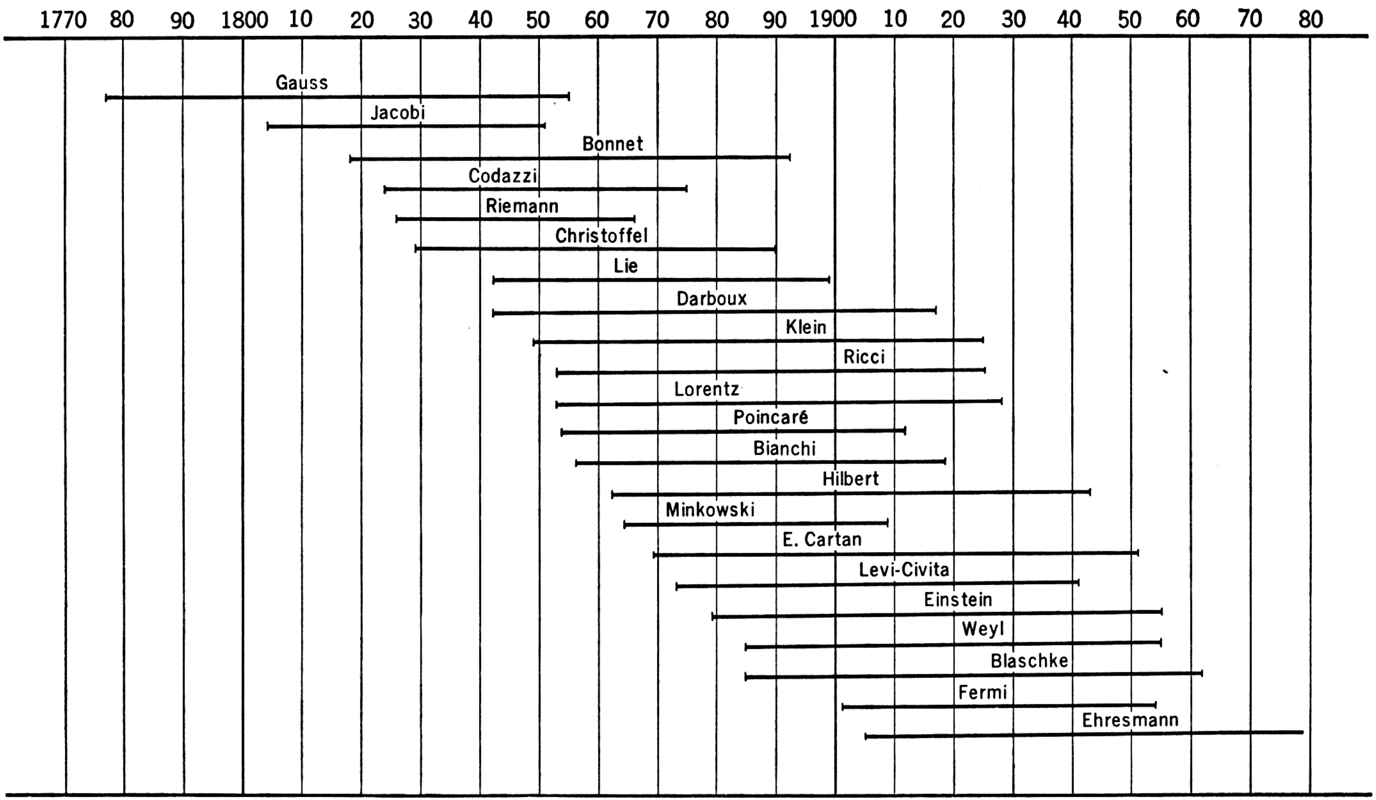
L. P. Eisenhart :　Riemannian Geometry (Princeton)

3.　序にのべた相対性理論については

S. W. Hawking, G. F. R. Ellis :　The Large Scale Structure of Space-time (Cambridge)

R. K. Sachs, H. Wu : General Relativity for Mathematicians (Springer)

人 名 年 代 表


1770
80
90
1800
10
20
30
40
50
60
70
80
90
1900
10
20
30
40
50
60
70
80
Gauss
Jacobi
Bonnet
Codazzi
Riemann
Christoffel
Lie
Darboux
Klein
Ricci
Lorentz
Poincaré
Bianchi
Hilbert
Minkowski
E. Cartan
Levi-Civita
Einstein
Weyl
Blaschke
Fermi
Ehresmann

索引

ナ　ノ

ハ

ヒ

フ

ヘ

ホ

著者略歴

1924 年（大正 13 年）大阪府出身．旧制三高から大阪大学理学部数学科卒．米国（コロンビア大学，シカゴ大学）留学．1953 年シカゴ大学より，Ph. D.，フランス国立科学研究所員としてパリ大学，ストラースブルグ大学で研究後帰国，理学博士．名古屋大学助教授，教授を経て 1958 年より米国在住．現在ブラウン大学教授．その間，パリ大学，西独ボン大学，イタリー大学連合数学夏期講座，大阪大学，ブラジル純粋応用数学研究所らの客員教授．

主な著書：Lie groups and differential geometry（日本数学会），Foundations of differential geometry，Vol. I，II（小林昭七氏と共著，John Wiley），Fundamentals of linear algebra（Mc Graw-Hill，日本語版は，矢野健太郎訳：線形代数の基礎上，下（基礎数学選書12，裳華房））．

基礎数学選書 25　現代微分幾何入門

1981 年 5 月 30 日　第 1 版発行©
1993 年 3 月 10 日　第 9 版発行

検印省略

定価はカバーに表示してあります．

著作者　野水克己
発行者　吉野達治
発行所　東京都千代田区四番町 8 番地
電話 東京 3262—9166～9
株式会社 裳華房
印刷所　横山印刷株式会社
製本所　板倉製本印刷株式会社

社団法人
自然科学書協会会員

ISBN 4-7853-1127-4

Printed in Japan

■基礎演習シリーズ■

微分方程式 藤本淳夫著　定価2369円	関数論 栗林暲和著　定価1854円
微分積分 田代・熊原著　定価2060円	線形代数 茂木・間下共著　定価1957円

■大学演習新書■

微分積分学 三村征雄編　定価3708円	解析学概論 矢野・石原共著　定価3708円
函数論 辻・小松著　定価3914円	

■数学選書■

1 線型代数学 佐武一郎著　定価2884円	2 ベクトル解析 岩堀長慶著　定価4429円
3 解析関数(新版) 田村二郎著　定価3811円	4 ルベーグ積分入門 伊藤清三著　定価3502円
5 多様体入門 松島与三著　定価3914円	6 可換体論(新版) 永田雅宜著　定価4120円
7 幾何概論 村上信吾著　定価3914円	8 有限群の表現 永尾・津島共著　定価4326円
9 代数概論 森田康夫著　定価3399円	10 代数幾何学 宮西正宜著　定価4326円
11 リーマン幾何学 酒井隆著　定価5871円	12 複素解析概論 野口潤次郎著　近刊

■数学シリーズ■

集合と位相 内田伏一著　定価2575円	常微分方程式 島倉紀夫著　定価2575円
代数入門 ―群と加群― 堀田良之著　定価2575円	位相幾何学 加藤十吉著　定価3090円
多変数の微分積分 大森英樹著　定価2575円	数理統計学 稲垣宣生著　定価3090円
多様体 ―曲面論からの入門― 上野健爾著　近刊	関数解析 増田久弥著　近刊

線形代数演習 内田・高木・剱持・浦川 共著 定価2060円	微分積分演習 岡安・吉野・高橋・武元 共著 定価2266円
リー代数と素粒子論 竹内外史著　定価4017円	一般力学系と場の幾何学 大森英樹著　定価4429円
接続の微分幾何とゲージ理論 小林昭七著　定価3502円	数論序説 小野孝著　定価2987円
変分法と調和写像 浦川肇著　定価3914円	テンソル 石原繁著　定価2575円